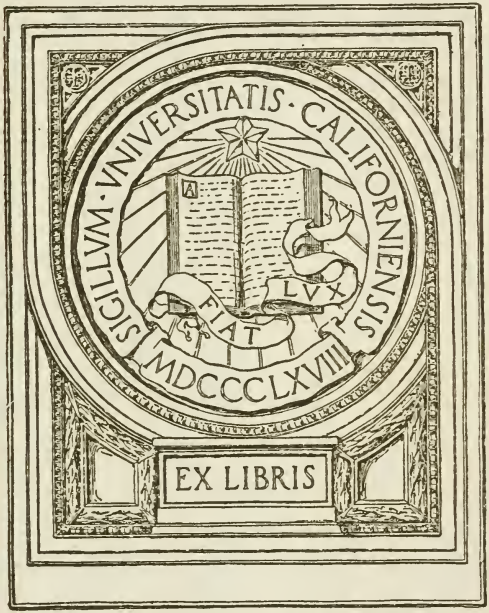
QH9
K91e

ENGINEERING &
MATHEMATICAL
SCIENCES LIBRARY

A
000169676
4
UC SOUTHERN REGIONAL LIBRARY FACILITY

UNIVERSITY OF CALIFORNIA
AT LOS ANGELES



UNIVERSITY of CALIFORNIA
LOS ANGELES
LIBRARY

Eine einzigartige Begabung und deren psychologische Analyse

von

Dr. Oswald Kroh
Professor der Philosophie
an der Technischen Hochschule zu Braunschweig

Göttingen / Vandenhoeck & Ruprecht / 1922

Kürzlich ist erschienen:

Subjektive Anschauungsbilder bei Jugendlichen

Eine psychol.-pädag. Untersuchung. Von Prof. Dr. **Oswald Kroh.** VIII, 195 S. gr. 8°. 1922. Geh. G.Z. 3*), geb. G.Z. 4,50.

Das Werk setzt sich zur Aufgabe, psychologisch und pädagogisch interessierte Kreise mit einer bislang übersehenen, charakteristischen und bedeutungsvollen Jugendeigentümlichkeit, der Erscheinung der subjektiven Anschauungsbilder, bekannt zu machen.

„Das Buch, eine reiche Fundgrube für jeden psychologisch interessierten Lehrer, **kann warm zur Anschaffung empfohlen werden.**" Hessische Schulzeitung 1922, 19.

„Das wertvolle Buch führt den Leser in psychologisches und pädagogisches Neuland, in dem so schnell wie möglich sich zu orientieren, für den Lehrer dringende Pflicht ist. Das flott, anschaulich und klar geschriebene Buch ist, abgesehen von der geschilderten inhaltlichen Seite, für den Lehrer auch deswegen besonders lesenswert, weil es einerseits in ein bedeutsames Stück psychologischer Einzelforschung einführt, ihm andererseits, und das ist nicht sehr häufig, die pädagogische Ausmünzung der dabei erzielten Resultate zeigt." — Der Rezensent schließt mit der Ankündigung, daß er das Werk in dem Blatt noch einer Würdigung unterziehen werde, die über den engen Rahmen dieser Besprechung hinausgeht.

Hannoversche Schulzeitung 1922 Nr. 39.

Aus unserm Verlage empfehlen wir ferner:

Die pädagogische Ausbildung des Oberlehrers an der Universität. Von Dr. David Katz, Professor an der Universität Rostock. 29 S. gr. 8°. 1914. G.Z. —,80

Ach, Narziß: Über die Willenstätigkeit und das Denken. Eine experimentelle Untersuchung mit einem Anhang: Über das Hippsche Chronoskop, X, 294 S. gr. 8°. 1905. G.Z. 10

Fries, Jak. Frdr.: Julius und Evagoras. Ein philosophischer Roman. Neu hrsg. u. mit einer Einleitung von W. Bousset. 38, 487 S. 8°. 1910. G.Z. 3,80 in Halbldwd. G.Z. 5,60

Schlapp, Otto: Kants Lehre vom Genie und die Entstehung der „Kritik der Urteilskraft". XII, 463 S. gr. 8°. 1901. G.Z. 10

Weiß, Geo.: Fries' Lehre v. d. Ahndung in Ästhetik, Religion und Ethik unter Berücksichtigung von Kant, Schiller und Jacobi. VI, 191 S. gr. 8°. 1912. G.Z. 4

Kastil, A.: Fries' Lehre von der unmittelbaren Erkenntnis. Eine Nachprüfung seiner Reform der theoretischen Philosophie Kants. 342 S. 1912. G.Z. 6

*) Die Grundzahl (G.Z.) ergibt multipliziert mit der offiziellen, in jeder Buchhandlung zu erfahrenden, jeweiligen Schlüsselzahl (Oktober 110) den gegenwärtigen Preis.

Verlag von Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen.

Eine einzigartige Begabung und deren psychologische Analyse

von

Dr. Oswald Kroh
Professor der Philosophie
an der Technischen Hochschule zu Braunschweig

Göttingen / Vandenhoeck & Ruprecht / 1922

113920

Meinen teuren Eltern

in herzlicher Liebe und Dankbarkeit

Columbia University
Library

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung. Haupt- und Nebenaufgabe der Untersuchung . . 1—3

1. Dr. Rückles Leistungen auf dem Gebiete des Zahlengedächtnisses . . . . . 3—17
Kritische Würdigung einschlägiger Untersuchungen. — Statistisches Material über R.s Leistungen beim Lernen von Ziffernreihen. — Karreeversuche. — Abhängigkeit der Lernzeit vom Umfang des Lernmaterials. — Allgemeine Charakteristik der Lernweise R.s.

2. Die Vergegenwärtigung der Zahlen . . . . . 17—28
Der Vorrang des visuellen Gedächtnisses bei R. — R.s Zahlendiagramm als typisches Rechendiagramm. — Die visuellen Ziffernbilder, im besondern R.s subjektive optische Anschauungsbilder. — Das Nebeneinander von Vorstellungsbild und Anschauungsbild bei R.

3. Psychologische Analyse der methodischen Grundprinzipien . . . . . 28—41
R.s Verhältnis zur Zahl im allgemeinen. — Das Interessantmachen des Zahlenmaterials als Voraussetzung seiner Leistungen. — Die dreistellige Zahl als Element beim Lernen und Rechnen. — Die Individualisierung der Zahlen und ihr Verhältnis zur Assoziierung. — Adäquatheit der Methoden bei R. — Taktische Maßnahmen: Taxieren und Präzisieren; zentrale Stellung der Multiplikation. — Eleganz der Methode. — Reinheit der Methode. — Wettstreit der Methoden.

4. Veranschaulichte und unveranschaulichte Operationen 41—47
Diagrammatisches Rechnen; seine besondre Bedeutung für R.s Leistungen. — Tendenz zur Orientierung am Empirischen. — Unveranschaulichtes Rechnen.

5. Statistisches über R.s Rechenleistungen . . . . . 47—58
Versuchsbedingungen. — Leistungen und Leistungsvergleiche (Multiplizieren, Potenzieren, Wurzelziehen, Logarithmieren, Primzahluntersuchungen, Zerlegungen).

6. Hilfen . . . . . 58—71
Beispiele für Gedächtnishilfen bei R. — Hauptaufgabe der Hilfen: Interessantmachen des Materials. — Phänomenologie der Hilfen. — Logische Einteilung. — Ähnlichkeit und Kontrast bei Ziffernkomplexen. — Art und Verwendung der Hilfen bei R. und bei Frl. Dr. P. Bergh. — Rechenhilfen. — Auswahl der Hilfen.

August 1926.

7. Psychische Nebenerlebnisse . . . . . 71—80
Ästhetische Gefühle. — Allgemeinere Bemerkungen über das Schöne in der Mathematik. — Schwer und Leicht. — Sicherheit und Unsicherheit.
8. Ökonomie der geistigen Arbeit . . . . . 80—90
R.s geringe Ermüdbarkeit als konstitutionelle Basis seiner Leistungen. — Das Interesse als leistungsteigernder Faktor und seine willkürliche Erregung. — Zusammengefaßte Darstellung der auf Ökonomie berechneten Maßnahmen R.s. — Übertragbarkeit der Methoden R.s auf andre Individuen. — Grenzen der Leistungsfähigkeit mnemotechnischer Systeme. — Spezialgedächtnisse.
9. Gesamtbild Rückles . . . . . 90—92
Vielseitigkeit. — Intelligenz. — Konzentrationsfähigkeit.
Anmerkungen . . . . . 93—95

Einleitung.

Die vorliegende Studie behandelt in erster Linie die einzigartigen Leistungen des Mathematikers Dr. Gottfried Rückle auf dem Gebiete des Zahlengedächtnisses und des Kopfrechnens. Sie versucht, diese Leistungen unter Heranziehung der einschlägigen Literatur sowie auf Grund ausgedehnter eigener Versuche zu beschreiben und zu analysieren und zugleich die Ergebnisse dieser Analyse für die Ökonomie der geistigen Arbeit nutzbar zu machen.

Außerdem steht die Untersuchung im Dienste einer Nebenaufgabe, die allerdings durch das monographische Gepräge des Ganzen stark verdeckt wird. Diese Aufgabe, die den Verfasser bei der Gewinnung des hier verarbeiteten Materials zunächst ausschließlich leitete, betrifft die Analyse der mathematischen Arbeitsweisen überhaupt. Zur Lösung eines derartig weitschichtigen Problems kann naturgemäß eine, im wesentlichen auf die Darstellung ganz spezieller Leistungen eines Einzelnen beschränkte Studie nur kasuistisches Material liefern. Aber auch hinsichtlich der Auswahl und des Umfangs dieses Materials ergeben sich bei der gewählten Behandlungsweise sehr enge, oft sogar einschneidende Grenzen, die den Nebenzweck zu Gunsten des Hauptzwecks zurücktreten lassen*).

Daß der Nebenzweck sich überhaupt und zwar mit einer gewissen Notwendigkeit im Rahmen unserer Untersuchung Geltung verschaffte, ist eine unmittelbare Folge der ausgesprochen mathematischen Struktur der Arbeitsweisen Rückles, die auch beim Zahlenlernen und Rechnen unverkennbar in die Erscheinung tritt. Nur sie erlaubt, an Zahlen gewonnenes Material für die Analyse der höheren mathematischen Arbeitsprozesse nutzbar zu machen.

*) Verf. beabsichtigt, in nicht allzuferner Zeit eine psychologische Analyse der mathematischen Arbeitsprozesse und Methoden zu veröffentlichen, die auch auf die hier nicht mitgeteilten Untersuchungsergebnisse vielfach Bezug nehmen wird.

Ein solches Zurückgehen auf leicht zugängliches Material muß gerade auf diesem Gebiete erwünscht sein. Vielen erscheint die Mathematik in ihrer fremd anmutenden, herben Formelsprache immer noch bloß als Wirkungsbereich besonderer, eng begrenzter Seiten des menschlichen Geistes, die bei dem einen zufällig entwickelt, bei einem anderen von Hause aus verkümmert sein können. Ja, auch darüber, daß diese Verkümmerung nicht ohne weiteres als Mangel zu betrachten sei, glaubt man sich in weitesten Kreisen klar sein zu dürfen. Manche gehen sogar noch einen Schritt weiter: Ihnen erscheint die „mathematische Geistesverfassung" durchaus als eine minderwertige Abform menschlicher Geistesentwicklung. — So steht die Mathematik immer noch im Streite der Meinungen: von ihren Jüngern verehrt wie kaum eine andere Wissenschaft, von Laien scheu gemieden oder unklar geachtet, von ihren Verächtern verlästert und verkannt. Umsomehr scheint eine psychologische Zergliederung der mathematischen Methoden und Arbeitsprozesse darauf angewiesen zu sein, von einem allen bekannten, mindestens allen zugänglichen Gebiete auszugehen: von dem Gebiete der Zahlen.

Gewiß ist dieses Gebiet allen zugänglich, aber die in ihm erworbenen Besitzstände und Machtbereiche sind doch wieder von Individuum zu Individuum stark verschieden. Hier nimmt nun Herr Dr. G. Rückle, dessen Arbeitsweisen im folgenden einer beschreibenden Analyse unterzogen werden, eine einzigartige Stellung ein. Schon G. E. Müller konnte in seinem klassischen Werke [1]) den Nachweis führen, daß R.s Zahlengedächtnis als bisher unerreicht gelten muß. Die vorliegende Studie wird diesen Nachweis insofern ergänzen, als sie an der Hand neuen Materials zeigen wird, wie seit den früheren Untersuchungen R.s Zahlengedächtnis sich weiter aufwärts entwickelt hat. Außerdem liefert sie die erste eingehendere Darstellung [2]) und Analyse von R.s Leistungen im Kopfrechnen und zeigt auch hier seinen einzigartig hohen Rang. Zugleich aber bemüht sie sich, sowohl die methodischen wie die psychologischen Grundlagen seiner Arbeitsweisen darzustellen.

Die Einzigartigkeit und Eigenart der Leistungen und Arbeitsweisen R.s im Gebiete der Zahlen scheinen eine monographische

Behandlung zu rechtfertigen. Doch hofft der Verfasser, daß seine Studie auch jenem ursprünglichen Zweck, eine Vorarbeit für die psychologische Analyse der mathematischen Arbeitsweisen überhaupt zu sein, in dieser Form noch einigermaßen gerecht wird. Drei Umstände im besonderen sind es, die — trotz der im wesentlichen durch die Zwecke der Monographie bestimmten Stoffauslese und -anordnung — den Verfasser in dieser Hoffnung bestärken: Der unverkennbar mathematische Grundcharakter der Arbeitsweisen R.s, seine ausgezeichnete Selbstbeobachtung und nicht zuletzt die Tatsache, daß seine Übernormalität nichts mit Anomalie zu tun hat, daß sie vielmehr im ganzen wie im einzelnen immer wieder den Eindruck bestätigt, den G. E. Müller in die Worte gefaßt hat (I, 1, S. 231): „Die Ruhe, Sicherheit, Leichtigkeit und äußerst geringe Ermüdbarkeit, mit der R. seine Leistungen vollzog, das Einleuchtende und Treffende, das seine Bemerkungen über seine Lernweisen zu besitzen pflegten, alles dies war von der Art, daß ich nicht selten beinahe von dem Eindruck erfaßt war, nicht er sei der Übernormale und wir anderen die Normalen, sondern er sei der Normale und wir anderen die Degenerierten."

1. Dr. Rückles Leistungen auf dem Gebiete des Zahlengedächtnisses.

Wir sind nicht gerade arm an Untersuchungen, in denen Sonderleistungen auf dem Gebiete der Zahlen mehr oder weniger ausführlich und genau beschrieben worden sind. Akademien und Einzelforscher von hohem wissenschaftlichen Rang haben es nicht verschmäht, in zum Teil eingehenden Untersuchungen die Höchstleistungen einzelner ihrer Zeitgenossen genauer zu bestimmen und auf ihre psychologischen Voraussetzungen hin zu betrachten. So hat z. B. die Akademie zu Paris öfters durch erwählte Kommissionen Kopfrechner untersuchen lassen, und unter den Berichterstattern treffen wir Namen wie Cauchy, Arago, Charcot, Binet u. A. So vorteilhaft das so gewonnene Material sich hinsichtlich seiner Zuverlässigkeit abhebt von dem, was in selbstgefälligen Autobiographien (Zerah Colburn)[3]) oder in mehr

oder weniger aufgebauschten Berichten entzückter Bewunderer niedergelegt ist, so wenig beweisen allerdings die dort wiedergegebenen zusammenfassenden Werturteile für den Grad der untersuchten Leistungen. So muß es komisch berühren, wenn eine französische Kommission an Henri Mondeux[4]) rühmt, daß er imstande war, 24 Ziffern in 5 Minuten zu lernen. Wie sehr der Vielgerühmte mit dieser Leistung hinter dem Durchschnitt der Normalen zurückbleibt, zeigte schon G. E. Müller, dessen aus dem Kreise seiner Schüler und Versuchspersonen genommene Vergleichspersonen sich eine Reihe von gleicher Länge in bedeutend kürzerer Zeit sicher einprägten. Erst recht werden wir uns der Relativität aller derartigen, nicht durch ausreichende Vergleiche mit zuverlässigem Material gestützten Behauptungen bewußt, wenn wir uns vergegenwärtigen, daß R. zu derselben Leistung bei unseren Versuchen fast stets weniger als 9 Sekunden, in einem Falle nur 6,4 Sekunden, gebrauchte. Immerhin aber gibt ein solches Material noch eine einigermaßen sichere Vergleichsgrundlage ab, ein Vorzug, der völlig entfällt, wenn wir auf Aussagen stoßen wie: „. . . . . rechnete mit größter, fabelhafter oder unerreichbarer Geschwindigkeit“ und dergl. Trotz dieses Vorzugs ist aber jenes Material in methodischer Hinsicht meist nicht so völlig bestimmt, daß eine genaue Wiederholung der Versuche möglich wäre. So fehlen in der älteren Literatur durchweg genauere Angaben über die Herstellung und die Darbietungsart des Materials, also über Faktoren, die auf die Leistung unter Umständen von erheblichem Einfluß sein werden. Erst recht dürftig ist der psychologische Ertrag. — Die kurzen Ausführungen mögen es verständlich machen, daß wir auf eine eingehende Berücksichtigung dieses Materials verzichten. Zudem haben Scripture[5]) und Mitchell[6]), zum Teil auch Binet[7]), die in Betracht kommende ältere Literatur gesammelt, gesichtet und geordnet.

Erst die Untersuchung von Binet über die Rechen- und Zahlengedächtnisleistungen von Inaudi[8]) und Diamandi[9]) hat sich von den Mängeln der früheren Arbeiten auf unserem Gebiete in weitem Umfange frei gehalten. Die Wendung zur strengen methodischen Exaktheit und eindringenden psychologischen Analyse

brachten aber erst die Arbeiten von G. E. Müller. Von seinen Untersuchungen kommen für uns im folgenden in erster Linie diejenigen Teile in Betracht, die sich mit den Gedächtnisleistungen von Dr. Rückle beschäftigen[10]). Für die neuere Untersuchung von F. E. O. Schultze[11]) ist die methodische Strenge Müllers sichtlich vorbildlich gewesen. Zu erwähnen ist auch eine kleine Untersuchung von F. Kemsies und A. Grünspan über den Rechenkünstler Ferrol[12]). Ferner muß hier noch der eindringenden Untersuchungen gedacht werden, die durch G. Hegge[13]) an der norwegischen Philologin Dr. Paula Bergh angestellt wurden, sowie der anderen Arbeiten desselben Autors über verwandte Fragen.

Wenn wir die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen über Rückles Gedächtnisleistungen betrachten, so fällt vor allem auf, daß diese trotz ihres an und für sich hohen Grades bisher fortgesetzt gestiegen sind.

Berechnen wir etwa aus den von G. E. Müller in seiner ersten Untersuchung mitgeteilten Resultaten die Durchschnittswerte (was in Anbetracht der relativ hohen Streuung der Lernzeiten nicht ohne Bedenken sein mag), so ergibt sich bei visueller Vorführung des Lernmaterials als Leistungsstand in der Zeit von 1902 bis 1905 etwa dieser:

Eine Reihe*) von 20 Ziffern lernte R. in 17,2 Sek. (n=3)**)

*) Die Herstellung einer solchen Reihe geschah bei G. E. Müller auf folgende Weise: Auf kleine Kartonblättchen wurden die Zahlen von 10 bis 99 (alle zweistelligen Zahlen) aufgeschrieben und hierauf die Blättchen gut gemischt. Die einzelnen Blättchen wurden dann ausgelost und dabei die Ziffern in der durch den Zufall bestimmten Folge im Abstand von je 1 cm in deutlicher Schrift in langen Reihen hinter- und untereinander geschrieben. Bei langen, über 180 Ziffern enthaltenden Reihen muß das Auslosen natürlich wiederholt werden. Im allgemeinen war die Anzahl der dabei in einer Reihe angeordneten Ziffern durch 6 teilbar. Bei sehr langen Reihen wurde das Ziffernmaterial in Gruppen abgeteilt, so z. B. bei einer Reihe von 408 Ziffern in 4 Gruppen zu je 102, wobei außerdem noch durch senkrechte Striche die einzelnen Sechserkomplexe getrennt waren. — Schultzes Verfahren der Ziffernauslese zeigt (vgl. a. a. O. S. 146) gewisse Abweichungen von dem angegebenen Verfahren G. E. Müllers, während wir uns bei unsern Versuchen eng an die Angaben dieses Autors hielten.

**) n = Anzahl der angestellten Versuche.

Eine Reihe von 42 Ziffern lernte R. in 48,1 Sek. (n=5)
" " " 48 " " " 52,4 " (n=4)
" " " 60 " " " 89,0 " (n=4)
" " " 72 " " " 149,6 " (n=4)
" " " 90 " " " 209,5 " (n=3)
" " " 102 " " " 259,0 " (n=4)
" " " 204 " " in 18 Min. 11 " (n=3)

Bei der Wiederholung und Ergänzung der Versuche im Jahre 1912 (Müller II, S. 194 ff.) brauchte R.

zu einer Reihe von 48 Ziffern 51,6 Sek. (n=3)
" " " " 102 " 170,35 " (n=4)
" " " " 204 " 8 Min. 38,1 " (n=2)

Wie man sieht, ein außerordentlicher Fortschritt, der zwar bei der 48-Ziffernreihe nicht so deutlich ist, sich aber — wie die weiteren Angaben zeigen werden — auch auf kürzere Reihen erstreckte.

Im Jahre 1913/14 untersuchte dann F. E. O. Schultze R.s Zahlengedächtnis in der Absicht, einer von R. beobachteten gesetzmäßigen Abhängigkeit der Lernzeiten von der Reihenlänge genauer nachzugehen. Scheiden wir dabei diejenigen Versuche, die nach einer R. zunächst nicht geläufigen Methode angestellt wurden, aus, so ergeben sich für die im Sommer 1913 durchgeführten Versuche folgende Lernzeiten:

25 Ziffern in 12 Sek.
48 " " 42 "
96 " " 122 "
144 " " 225 "
192 " " 408 "
288 " " 14 Min. 13 Sek.
384 " " 33 " 13 "
504 " " 44 " 40 "

Wenige Monate später (Winter 1913/14) sind die entsprechenden Zahlen noch geringer:

25	Ziffern	in	11	Sek.		
48	„	„	40	„		
96	„	„	107	„		
144	„	„	206	„		
192	„	„	344	„		
288	„	„	10	Min.	39	Sek.
384	„	„	24	„	29	„
504	„	„	34	„	39	„

Der Fortschritt ist unverkennbar. Zum Teil wird er auf die vorangegangene Übung, zum Teil auf die damalige Berufstätigkeit R.s zurückzuführen sein. (R. berechnete in jener Zeit nicht weniger als 54 Planeten- und Planetoidenbahnen im Frankfurter Planeteninstitut.)

Doch auch diese gewiß erstaunlichen Werte stellen noch nicht R.s Höchstleistungen dar. Obgleich er sich inzwischen während des Krieges und im Beruf wohl ausgiebig mit Problemen der technischen Mechanik, aber nur gelegentlich mit zahlenmäßigem Material beschäftigte, zeigten unsere wenigen auf die Leistungen seines Zahlengedächtnisses abzielenden Versuche auch ohne Vorübungen sofort, daß seine Leistungsfähigkeit inzwischen weiter gestiegen war. So benötigte er nunmehr zur Erlernung eines Karrees von 25 Ziffern im Mittel 8,5 Sek., eines Karrees von 49 Ziffern im Mittel 27 Sek.; ferner lernte er 102 Ziffern in 100 Sek. und gebrauchte zu 204 Ziffern nur 6 Min. 10,2 Sek.

Ein ähnlicher Fortschritt zeigte sich bei akustisch dargebotenem (vorgelesenem) Material. Hier hatte Müller zunächst (I, 1, S. 190) festgestellt, daß R. 18 Ziffern nach einmaligem Vorlesen in Einzelziffern fehlerfrei zu wiederholen vermochte, solange die Vorlesezeit nicht unter 10 Sek. herunterging. Schon 1912 (G. E. Müller II, S. 195) konnte R. eine Reihe von 36 ihm in 39 Sek. einmal vorgelesenen Ziffern sofort (mit einmaligem Stocken) in 30 Sek. ohne Fehler wiederholen. Bei unseren Versuchen wiederholte er 49 ihm einmal in 36,4 Sek. vorgelesene Ziffern (mit einem Vorhalt) in 21 Sek.

Werden ihm die Zahlen nicht in Einzelziffern, sondern nach ihrem Stellenwert zusammengefaßt dargeboten, so steht seine

Leistungsfähigkeit noch höher. Bei derartigen Versuchen bevorzugt R. die Einordnung der genannten Zahlen in das Schema eines Karrees von entsprechender Größe. Karrees mit ungerader Reihenzahl (25-, 49- und 81-Ziffern-Karrees) genießen dabei den Vorrang. Nur sie haben eine, durch Ziffern gegebene, senkrechte Mittellinie. Diese wirkt als Symmetrieachse, um die sich der übrige Teil des Karrees gruppiert und „hält das Ganze fester zusammen." Die 5 fünfstelligen Zahlen eines 25er-Karrees werden z. B. bei diesen Versuchen sehr oft nicht weiter zerlegt. Beim 49er-Karree dagegen zeigt sich die Einprägung erleichtert, wenn jede 7stellige Reihe in eine 3- und in eine 4stellige Zahl zerlegt wird, obwohl sonst 3er- und 4er-Komplexe von R. beim Lernen nicht bevorzugt werden. Entsprechend werden die 9gliedrigen Reihen des 81er-Karrees in 4- und 5stellige, die 11gliedrigen Reihen des 121er-Karrees in 5- und 6stellige Zahlen zerlegt vorgelesen bezw. zugerufen*). Die Ungleichmäßigkeit, die durch diese Zerlegung in das Material hineinkommt, fördert das Auseinanderhalten der einzelnen Komplexe. Dieselbe Wirkung tritt ein, wenn — etwa aus einem größeren Zuhörerkreis heraus — die Zahlen von verschiedenen Personen genannt werden.

Bei G. E. Müllers ersten Versuchen vermochte R. ein Karree von 25 Ziffern dann sicher aufzufassen und wiederzugeben, wenn ihm die 5 fünfstelligen Komplexe als fünfstellige Zahlen in einer zwischen 20 und 27 Sek. liegenden Zeit vom Versuchsleiter genannt wurden. Bei unseren Versuchen genügte eine Vorlesezeit von 12 bis 15 Sek. Ein 49er-Karree, das ihm in 48 bis 60 Sek. vorgelesen wurde, gab R. 1912 (G. E. Müller II, S. 196) meist richtig wieder. Jetzt benötigte er bei einem Einzelversuch zum gleichen Karree nur 38 Sek. Während er ein 81er-Karree 1912 (a. a. O.) nach einmaligem Vorlesen, das in 115 Sek. stattfand, mit einem kleinen Fehler aufzusagen vermochte, genügte bei einem neuerdings angestellten, ebenfalls ver-

*) Wie man sieht, werden bei einer derartigen Zerlegung die Ziffern der mittleren Vertikalen zu Anfangsziffern des 2. Komplexes jeder Horizontalreihe. Dadurch erhalten sie eine ausgezeichnete Stellung, die ihre Einprägung fördert und ihrer Funktion, als Symmetrieachse zu wirken, entgegenkommt.

einzelten Versuch eine Vorlesezeit von 83 Sek. völlig zum richtigen Hersagen. Bei einem Karree von 121 Ziffern mußte sich an ein 193 Sek. dauerndes Vorlesen eine — mit hoher Lesegeschwindigkeit erfolgende — Wiederholung anschließen, die 35 Sek. in Anspruch nahm. Alsdann erfolgte auch hier die bis auf zwei Vorhalte richtige Reproduktion.

Damit sich der Leser von diesen Leistungen ein Bild machen kann, sei im folgenden das vorstehend erwähnte 81er-Karree mitgeteilt:

3 8 5 2 4 5 7 9 6
1 9 2 4 3 5 3 7 2
7 0 9 1 6 4 1 3 8
4 1 5 6 2 0 8 4 7
8 4 2 3 6 6 3 9 1
5 1 0 4 2 7 9 2 2
8 1 3 0 1 7 2 0 8
9 6 4 5 2 8 0 5 1
6 9 2 1 8 3 4 7 7

Die Vorlesezeit betrug, wie bereits angegeben, 83 Sek. R. gab sofort das ganze Karree in Einzelziffern wieder und brauchte dazu 45 Sek., eine Zeit, die im Vergleich zu andern Leistungen (R. sagte bei unsern Versuchen einmal eine 102-Ziffernreihe in 29 Sek. auf) für ihn als lang bezeichnet werden muß. Hierauf nannte er die einzelnen Ziffern von hinten (also mit 7 7 4 usw. beginnend) in 36 Sek. Wie sehr er das Ziffernmaterial nun beherrschte, zeigten dann erst recht deutlich die weiteren Auffageversuche. Hierbei ging er u. a. durch das Karree in abwechselnd auf- und absteigenden Kolonnen, also: 3 1 7 4 8 5 8 9 6 9 6 1 1 4 usw. und benötigte dazu 74 Sek. Weiter ordnete er die Ziffern auf einer Spiralen an, die von innen nach außen

ging (in der Figur durch die punktierte Linie gekennzeichnet). Zeit 64 Sek. — Als letzte und schwerste Leistung erfolgte dann das Hersagen in Diagonalen, wobei er links unten anfing, also die Reihe in der Anordnung 6 9 9 2 6 8 1 4 1 5 usw. wiedergab. Bei dieser Art des Aufsagens gebrauchte R. 133 Sek.*).

Voraussetzung derartiger Leistungen ist natürlich eine sehr geringe Ermüdbarkeit R.s, die schon von G. E. Müller festgestellt und bei unseren Versuchen immer wieder beobachtet werden konnte. Unsere Versuche fanden z. B. durchweg abends von 8 Uhr ab statt und dauerten in der Regel zwei Stunden, nachdem R. im Laufe des Tages durchschnittlich 8 Stunden angestrengt geistig gearbeitet hatte. Auch dann, wenn körperliche Arbeit (ausgedehnte Spaziergänge und dergl.) vorausgegangen waren, zeigte sich keine Verringerung seiner Leistungsfähigkeit. Trotzdem glaubte F. E. O. Schultze bei seinen Versuchen Ermüdungswirkungen nachweisen zu können, unter Bedingungen, bei denen ich auf Grund meiner Erfahrungen an R. nicht an eine Ermüdung im eigentlichen Sinne glauben kann. Schultze verteilte bei seinen Versuchen das Lernpensum in einer ganz besonderen Weise. Zunächst gab er jedesmal eine 25er-Reihe als Vorübung. Darauf folgte eine 48-Ziffern-Reihe, hiernach eine der längeren Reihen, sodann wieder eine Reihe von 48 Ziffern; öfter schloß sich daran noch das Lernen einer längeren Reihe an, der zum Schluß wieder eine 48-Ziffern-Reihe folgte. Sch. beobachtete, daß innerhalb eines Versuchstags jede folgende der 48-Ziffern-Reihen eine höhere Lernzeit erforderte als die vorhergehende und sah darin einen Ausdruck der Ermüdung, die durch die zwischengeschalteten längeren Reihen verursacht sein sollte. Nun läßt sich natürlich diese Erklärung nicht kurzerhand abtun. Doch hat mir eine Reihe eigens angestellter Versuche eine andere

*) Derartige Karreeversuche sind zuerst nach dem Vorschlag des französ. Psychiaters Charcot angewandt worden, der in ihnen mit Recht eine geeignete Methode sah, Lerner vom visuellen Typ von nichtvisuellen zu scheiden, Es liegt auf der Hand, daß bei akustischem bezw. akustisch-motorischem Lernen ein Auffagen von hinten oder in Diagonalen nur unter großer Anstrengung und nur bei sehr langen Auffagezeiten möglich ist.

Erklärung wahrscheinlich gemacht. Ich gab R. mehrfach im Anschluß an längere Reihen oder anstrengende Rechenversuche kürzere Reihen zu lernen, wenn vorher am gleichen Versuchstag Reihen gleicher Länge noch nicht gelernt worden waren. In der Regel erhielt ich dabei, da er dann besonders gut im Zuge war, besonders günstige Lernzeiten. Anders aber, wenn ich mehrere Reihen gleicher Länge und Anordnung unmittelbar hintereinander lernen ließ. Alsdann trat eine Verlängerung der Lernzeit ein, die ihrem Grade nach sogar weit über die von Schultze beobachtete Verlängerung hinausging. Das galt auch dann, wenn keine anderen Reihen vorher gelernt und die Reihen selbst sehr kurz waren, von einer Ermüdung also nicht die Rede sein konnte. So lernte R. die erste von drei 25-Ziffern-Reihen in 7, die zweite in 9,5 und die dritte gar erst in 13 Sek., trotzdem Erholungspausen von etwa 5 Minuten eingeschaltet waren. Seine Selbstbeobachtung sowie die trotz der ansteigenden Lernzeit gelegentlich gemachten Fehler wiesen deutlich auf die Ursache hin. Die Reihen waren einander in ihrem strukturellen Gesamtbild zu ähnlich und die vorhergehende war jedesmal beim Auffagen der nächsten noch zu gut im Gedächtnis, als daß R. sie völlig hätte unterdrücken können. So hemmten denn die Reihen einander in stärkster Weise. Sicher ist es richtig, wenn G. E. Müller bezüglich der Perseverationen R.s sagt, daß sie nur schwach seien. Aber so sehr R. auch die Fähigkeit hat, sich innerlich in kürzester Zeit auf ein neues Lernmaterial einzustellen, so wenig wird man dabei vergessen dürfen, daß Reihen ähnlicher Art (gleicher Länge und ähnlicher Anordnung), die in kurzer Folge auftreten, starke Hemmungen aufeinander ausüben. Diese Tatsache erscheint nicht unverständlich, wenn man den Lernvorgang bei derartigen Versuchen analysiert. Die zu lernenden Ziffern verbinden („assoziieren") sich ja nicht nur untereinander, sondern jede von ihnen ist auch in ganz bestimmter Weise mit der Stelle des Schemas verknüpft, an der sie auftritt. Werden nun mehrere Reihen — wie bei Versuchen mit Karrees gleicher Größe — demselben Stellenschema zugeordnet, so wirkt bei der Reproduktion das Auftreten einer bestimmten Stelle dieses Schemas im Sinne

einer Reproduktionstendenz auf alle mit dieser Stelle assoziierten Ziffern, soweit ihre Verbindung mit jener Stelle noch nicht allzusehr gelockert ist. Sobald nun die Ziffern einer Reihe untereinander nicht genügend fest assoziiert sind bezw. ein Ziffernkomplex nicht fest genug eingeprägt ist, kann eine der Reproduktionstendenzen, die auf Grund der Stellenassoziation auf eine Ziffer oder einen Komplex einer früher gelernten, ähnlich angeordneten Ziffernreihe gerichtet ist, so stark zur Geltung kommen, daß sie jenes Reihenglied auch tatsächlich ins Bewußtsein ruft und so einen Fehler verursacht. Aber auch dann, wenn dieser Fall nicht eintritt, können die verschiedenen Reproduktionstendenzen hemmende Wirkungen aufeinander ausüben, die das Lernen und Auffagen beeinträchtigen. Derartige Hemmungen aber müssen dann folgerichtig auch innerhalb einer einzelnen längeren Ziffernreihe auftreten. Vielleicht gewinnen wir gerade durch die Berücksichtigung dieses Gesichtspunktes die Möglichkeit zu einer Erklärung der von Schultze verifizierten „Rückleschen Gesetzmäßigkeit".

Bei dieser handelt es sich um folgende eigenartige Tatsache. R. beobachtete, daß er zu einer Reihe von doppelter Länge im allgemeinen die vierfache Lernzeit brauchte, m. a. W., daß die Lernzeiten mit dem Quadrat der Reihenlängen wachsen. Die von uns beobachteten Rekordwerte

25	Ziffern	in	6,4	Sek.
49	„	„	25	„
102	„	„	100	„
204	„	„	370	„

mögen etwa als Beispiel genannt werden. Während sich die Reihenlängen etwa wie 1 : 2 : 4 : 8 verhalten, wachsen die Zeiten angenähert wie 1 : 4 : 16 : 64, genauer wie 1 : 3,9 : $15^5/_8$: 58. Natürlich wird man bei empirisch gewonnenem Material niemals eine strenge, sondern günstigstenfalls nur eine angenäherte Gesetzmäßigkeit erwarten können. Zudem ist auch für den Eindruck der Übereinstimmung der gemessenen Zeiten mit den auf Grund der Formel errechneten die Wahl der Bezugszahl nicht ohne Einfluß. F. E. O. Schultze stellte durch eingehende Untersuchungen nun

fest, daß bei dem von R. für gewöhnlich eingeschlagenen Lernverfahren die Gesetzmäßigkeit weniger genau gilt als beim Ganzlernverfahren. Bei diesem letzteren wird die ganze Reihe, und sei sie auch noch so lang, während des ganzen Lernaktes dauernd ganz in gleicher Richtung (von vorn nach hinten) durchlaufen, bis zur völligen Beherrschung der ganzen Reihe. R. teilt statt dessen für gewöhnlich lange Reihen in mehrere Teile, die er nacheinander einprägt. Der Einprägung der Teile läßt er alsdann noch eine Einprägung des Ganzen folgen. Bei diesem Verfahren gebraucht er für lange Reihen im allgemeinen etwas niedrigere Lernzeiten als bei der Anwendung des Ganzlernverfahrens[14]).

Es ist natürlich nicht ohne weiteres möglich, die psychologischen Grundlagen dieser Tatsache einwandfrei zu bestimmen. Soviel ist jedenfalls sicher, daß man als günstigsten Fall denjenigen anzusehen hätte, bei dem Reihenlänge und Lernzeit einfach proportional wachsen, der doppelten Reihenlänge auch die doppelte Lernzeit entspricht usw. Nun zeigt aber ein Blick in die psychologische Literatur des Gedächtnisses, wie weit das normale, rein mechanische Lernen von einer solchen „optimalen" Gesetzmäßigkeit entfernt ist. So beobachtete z. B. bekanntlich Ebbinghaus[15]), daß er beim Lernen von sinnlosen Silben durchschnittlich zu einer Reihe von 7 Silben ein einmaliges, einer Reihe von 12 Silben ein 16,6 maliges, einer Reihe von 16 Silben ein 30 maliges, einer Reihe von 24 Silben ein 44 maliges und einer Reihe von 36 Silben ein 55 maliges Durchlesen nötig hatte. In diesem Falle liegt eine Beziehung zwischen Lernzeit und Reihenlänge vor, die durchweg ungünstiger ist als die von R. an sich beobachtete. Sie ist, sofern man aus dem begrenzten Material einen Schluß ziehen darf, überdies sehr unregelmäßig, was besonders deutlich wird, wenn man statt der von E. angegebenen Wiederholungszahlen die entsprechenden Lernzeiten berechnet.

Vergleichen wir damit die Zeiten, die wir zum Erlernen eines Gedichtes gebrauchen, das uns inhaltlich vollkommen verständlich ist und in seinen einzelnen Strophen von ziemlich gleicher

Schwierigkeit erscheint. Jedermann wird zugeben, daß das Verhältnis von Strophenzahl und Lernzeit ein völlig anderes ist als das von Ebbinghaus für sinnlose Silben festgestellte. So brauchen wir, um nur einen Fall herauszugreifen, sicher nicht eine 14- bis 16fache Wiederholung, wenn wir anstelle eines Gedichtes, das wir nach einmaligem Durchlesen wiederzugeben vermögen, ein Gedicht von doppelter Länge zu lernen haben; vorausgesetzt natürlich, daß beide Gedichte hinsichtlich ihrer Schwierigkeit ein ähnliches Lernmaterial darstellen. Aber auch die vierfache Lernzeit (die der „Rücklesche Gesetzmäßigkeit" entsprechen würde) dürfte unter diesen Umständen zu hoch gegriffen sein. Vielmehr steigt, wie Verf. bei derartigen Versuchen beobachten konnte, die Lernzeit sowohl wie die Anzahl der Wiederholungen nicht erheblich über das Doppelte hinaus; sie geht also angenähert proportional der Menge des Lernmaterials.

Vergegenwärtigen wir uns die Vielgestaltigkeit der mit diesen kurzen Hinweisen angedeuteten möglichen Abhängigkeiten zwischen Lernzeit und Umfang des Lernmaterials, so erhellt, daß die bei R.s Ziffernlernen zu beobachtende Gesetzmäßigkeit einen singulären Fall darstellt. Sicher bedeutet sie, wie eine Vergleichung mit den bezüglich des Lernens von Gedichten skizzierten Tatsachen erweist, kein absolutes Optimum. Und doch wieder ist sie als relatives Optimum nicht zu unterschätzen. Man braucht nur einmal einen Lernversuch mit Ziffern anzustellen, um, sofern man sich nicht besonderer Hilfsmittel (mnemotechnischer Kunstgriffe und dergl.) bedient, zu beobachten, wie sehr sich der gewöhnliche Lerner dabei den von Ebbinghaus für sinnlose Silben festgestellten Verhaltungsweisen annähert. Demgegenüber besitzt die „Rücklesche Gesetzmäßigkeit" eine bedeutende Überlegenheit.

In der Tat bilden für den gewöhnlichen Lerner willkürlich zusammengestellte Ziffern ein ziemlich sinnloses Material. Demgemäß werden sie in der Regel rein mechanisch aufgefaßt. Davon kann bei R. nicht die Rede sein. Wie sehr er es vielmehr versteht, das spröde Material zu beleben und wie wichtig für ihn diese Belebung ist, wird anderenorts noch genauer dargelegt werden. Trotzdem aber vermag auch er sich nicht so günstige

Bedingungen zu schaffen, wie sie etwa beim Lernen eines Gedichtes bestehen. Nur zum Teil wird diese Tatsache sich daraus ableiten, daß die Sinnerfüllung des Materials nicht so völlig gelungen sein mag wie bei einem an und für sich sinnvollen Stoff, dessen Einprägung zudem durch Reim, Rhythmus, sprachlichen Wohllaut, Logik der Handlung usw. erleichtert wird. Vielmehr scheint mir eine früher mitgeteilte Beobachtung wegweisend, nach welcher beim Lernen mehrerer aufeinanderfolgender Ziffernreihen gleicher Länge und Anordnung sich ein unverhältnismäßiges Ansteigen der Lernzeit ergab. Wir versuchten die Wirkung von Hemmungen, die die einzelnen durch die Stellenassoziation hervorgerufenen Reproduktionstendenzen aufeinander ausüben, für diesen Befund verantwortlich zu machen. Derartige Hemmungen werden naturgemäß auch innerhalb langer Reihen auftreten und die Lernzeit im ungünstigen Sinne beeinflussen, in manchen Fällen auch Fehler verursachen. Wenn man sich vergegenwärtigt, wie groß gerade bei regelmäßig angeordneten langen Ziffernreihen die aus der Anordnung und der Wiederholung bestimmter Ziffernfolgen hervorgehende Ähnlichkeit gewisser Reihenteile untereinander ist, so wird ohne weiteres verständlich, wie stark auch innerhalb einer solchen Reihe die Reproduktionstendenzen hemmend aufeinander einwirken müssen. Je mehr man sich die so aus der Natur des Materials hervorgehenden Schwierigkeiten vergegenwärtigt, umso deutlicher wird zugleich, welch einzigartige Leistung R. vollbringt, indem er dieses Material bewältigt.

G. Hegge weist darauf hin, daß es der von ihm untersuchten Philologin Frl. Dr. Paula Bergh möglich ist, lange Reihen von konkreten Substantiven sowie auch Ziffernreihen, deren Glieder ihr in Abständen von 5 bis 10 Sek. einzeln dargeboten werden, nach einmaligem Anhören wiederzugeben. Über das Verfahren, das Frl. Bergh bei diesen Versuchen einschlägt, werden an späterer Stelle noch eingehendere Mitteilungen gemacht werden. Hinsichtlich der Geschwindigkeit der Einprägung von Zahlen ist sie natürlich R. weit unterlegen. Man braucht sich nur zu vergegenwärtigen, daß bei ihr die Einprägung einer einzigen Ziffer etwa so lange dauert, wie bei R. die eines Karrees von 25

Ziffern. Uns muß aber hier die auffällige Tatsache interessieren, daß bei ihrem Einprägungsverfahren die Lernzeit einfach proportional der Reihenlänge ansteigt*), eine Tatsache, aus der ihre besondere Eignung für das Lernen sehr langer Reihen ohne weiteres folgt. Wir müssen G. Hegge zustimmen, der in dieser Tatsache einen Hinweis darauf erblickt, wie vollständig es ihr gelingt, die bei der Natur eines so gleichförmigen, spröden Materials normalerweise auftretenden Hemmungen auszuschalten.

Über die Lernweise R.s hat G. E. Müller eingehende Untersuchungen angestellt, deren Resultate wir hier zu Grunde legen. Doch zeigt sich unverkennbar, daß R.s Lernweise seit der Untersuchung durch G. E. Müller an methodischer Straffheit und Folgerichtigkeit bedeutend gewonnen hat. R. pflegt, wenn ihm ein andrer Lernmodus nicht vorgeschrieben wird, in der Regel 6 Ziffern zu einem Komplex zusammenzufassen. Nur selten läßt er einen solchen Sechserkomplex völlig ungespalten; meist zerlegt er ihn in 2 dreistellige Zahlen, die er einzeln auf ihre zahlentheoretischen Eigenschaften hin betrachtet und sodann — zumeist mit Hilfe der bei dieser Betrachtung gefundenen zahlentheoretischen Beziehungen — miteinander verbindet. Sie erscheinen ihm als die beiden Atome, die sich in der Regel zu einem, sowohl nach seinen zahlentheoretischen Eigenschaften wie auch nach seinem visuellen Gesamteindruck völlig bestimmten, Molekül — dem Sechserkomplex — vereinigen. Der Grad der Verschmelzung, der bei dieser Vereinigung zu beobachten ist, muß naturgemäß von Fall zu Fall verschieden sein. Bald sind die Teile des Komplexes nur lose zusammengefaßt und durch eine, vielleicht wenig charakteristische Beziehung zahlentheoretischer Natur nur andeutungsweise vereinigt, sodaß dann der Komplex kaum mehr ist als die Summe seiner Elemente. Bald gewinnt die Verbindung eine weitergehende Bedeutung, indem sie so innig wird, daß in der neuen Einheit des Komplexes die Eigenschaften der Elemente — hier meist der Dreiergruppen — völlig zurücktreten. — Ein Beispiel

*) So lernte Frl. Bergh eine Reihe von 204 Ziffern in 54 Minuten, eine Reihe von 408 Ziffern in 104 Minuten.

mag illustrieren, was hier gemeint ist. In einer Reihe bildete R. den Sechserkomplex 343 049. 343 merkte er als 7^3, 049 als 7^2. So wurden beide „Atome“ als Potenzen der gleichen Primzahl 7 aufgefaßt. Man sieht sofort, wie locker auf dieser Stufe der Komplexbildung noch die Verbindung der Teile ist. Aber R. blieb im vorliegenden Falle nicht bei dieser lockeren Verknüpfung, die die Eigenschaften der Teile noch unverhüllt zeigt, stehen. Er faßte vielmehr nun den ganzen Sechserkomplex als Produkt von 49×7001 bezw. $7^2 \times 7001$ auf, wobei ihm wieder 7^2 als charakteristische Primzahlpotenz und 7001 als bekannte und aus besonderen rechentechnischen Gründen vertraute Primzahl geläufig sind.

Die an späterer Stelle (Kap. 6) gegebenen Beispiele von Lernhilfen bei der Einprägung von Ziffernreihen bieten genügendes Material ähnlicher Art, in dem auch die Übergangsformen nicht fehlen. Ebenso ist, worauf kaum hingewiesen zu werden braucht, auch das umfangreiche Material, das G. E. Müller zum Problem der Hilfen sowie zur Frage der Komplexbildung liefert, reich an einschlägigen Beispielen und theoretischen Hinweisen. Über die Bedeutung der Hilfen für den Vorgang des Lernens sowie über ihre Erscheinungsweise wird an andrer Stelle (Kapitel 6) eingehender berichtet werden.

2. Die Vergegenwärtigung der Zahlen.

R. stellt eine ziemlich reine Form des visuellen Typs dar. Zwar ist auch sein akustisch-motorisches Gedächtnis von hoher Leistungsfähigkeit. Doch hat es für seine Lern- und Rechenleistungen eine bloß untergeordnete Bedeutung. Nicht nur pflegt er sich, wie schon G. E. Müller zeigen konnte, Ziffernkomplexe und Aufgaben, die ihm vorgelegt werden, in der Erinnerung visuell zu vergegenwärtigen, nein, auch bei akustischer Darbietung ist die Umsetzung in visuelle Bilder für ihn die Regel. Lediglich dann, wenn die akustische Darbietung eine gewisse, allerdings sehr hohe, Geschwindigkeit überschreitet, sowie bei den letzten Ziffernkomplexen mancher Reihen pflegt er auditiv aufzufassen und

auf Grund seines akustischen bezw. akustisch-motorischen Gedächtnisses zu reproduzieren. Die Leistungen, die er bei dieser beschränkten Verwendung des akustischen Gedächtnisses aufweist, bleiben kaum hinter denen zurück, die sich auf visuelle Darbietung stützen. Aber dafür wird man weniger die absolute Leistungsfähigkeit seines akustischen Gedächtnisses als die Beschränkung in seinem Gebrauch, die er sich in offenbar genauer Kenntnis jener Leistungsfähigkeit auferlegt, verantwortlich machen dürfen. — Wie dem auch sei, jedenfalls ist der Anteil des akustischen Gedächtnisses an R.s Leistungen so gering, daß wir seiner hier nicht ausführlicher zu gedenken brauchen.

Was die visuelle Vergegenwärtigung von Zahlengrößen anbetrifft, so müssen wir bei R. zur Zeit zwei grundverschiedene Arten unterscheiden. Zahlen unter 1000 pflegt er sich, besonders dann, wenn er mit ihnen ganz bestimmte Operationen vorzunehmen hat, an einer geraden Linie zu veranschaulichen, die ihm in einem Abstand von etwa 50 cm als Vorstellungsbild erscheint. Er beschreibt diese Linie als dunkelgrauen Strich. Jedem Hundert entspricht $^1/_{10}$ der Gesamtlänge. Sie stellt die einfachste Form eines Diagramms dar, eines Diagramms übrigens, das in seiner besonderen Art von hoher Zweckmäßigkeit ist und eine vielgestaltige Verwendbarkeit gestattet (vgl. Kapitel 4)*).

Zahlendiagramme sind nichts Seltenes. Galton[16]), Bleuler[17]), Flournoy[18]) und G. E. Müller[19]) haben umfangreiche Erhebungen über Vorkommen, Art, Erscheinungsweise und Verwendung solcher Diagramme angestellt, und dabei eine Fülle von bemerkenswerten Resultaten ans Licht gezogen. Was die meisten dieser Diagramme auszeichnet, ist ihre Gliederung in deutlich getrennte Abschnitte. Die einzelnen, im Diagramm veranschaulichten Bereiche sind scharf voneinander getrennt. So liegen häufig die Einheiten von 1—10 auf dem aufsteigenden, die von 10—100

*) Im vorliegenden Falle handelt es sich um ein Zahlendiagramm. Daneben gibt es auch Diagramme für gewisse Zeitabschnitte (Wochen- u. Jahresdiagramme), sowie solche für bestimmte Daten (Kalenderdiagramme). R. verfügt nur über das beschriebene Zahlendiagramm.

auf dem oft gegliederten absteigenden Teil einer zusammenhängenden Kurve. Oft ist die Form noch verwickelter, indem an gewissen Stellen (1—12 bezw. 101—112) die Form eines Zifferblattes wiederkehrt und dergl., wie überhaupt die Einflüsse bestimmter jugendlicher Erfahrungen sich in solchen Diagrammen besonders deutlich zu spiegeln pflegen (G. E. Müller, R. Hennig[20]), Phillips[21]). Eigentümlich ist für die meisten Diagramme, vor allem, wenn sie einen größeren Bereich umfassen, die Tatsache, daß sie gleiche Größendifferenzen nicht in gleichen Strecken wiedergeben. So kann es vorkommen, daß der Teil eines Diagramms, der den 10 ersten Einheiten entspricht, so groß oder nur fast so groß erscheint, wie der Teil, der als der Träger der Zahlen von 10—100 anzusehen ist. Will man dieser Tatsache einen mathematischen Ausdruck geben, so kann man sagen, daß der Wert der Einheit in den verschiedenen Teilen der Diagramme stark verschieden zu sein pflegt. Sie besitzen kein konstantes Einheitsmaß. Dieser Umstand beschränkt im Verein mit ihrer unstetigen Gesamtform ihre Verwendbarkeit. Sie sind wohl imstande, die Lage gewisser Zahlen gut zu veranschaulichen, aber für eine Verwendung als Anschauungsmittel bei Rechenoperationen kommen sie nicht oder nur in beschränktem Maße in Frage. So können sie wesentliche Gedächtnishilfen darstellen, wie insbesondere Müller zeigen konnte, ohne dabei für eigentliche Rechenoperationen anders als bei der Einprägung der Aufgabe und gewisser Teilresultate der Lösung in Betracht zu kommen.

Vielleicht ist es berechtigt, solche Diagramme als Lern- oder Merkdiagramme zu bezeichnen und von ihnen diejenigen zu sondern, die infolge ihrer besonderen Gestalt und Verwendung als Rechendiagramme gelten müssen. Gemäß dem Vorangegangenen wird man Diagrammen der letzteren Art einfachen Bau und Konstanz des Einheitsmaßes als erwünschte Eigenschaften zuerkennen müssen. Tut man das aber, so muß man in R.s Zahlendiagramm den reinen Typus eines Rechendiagramms sehen. Die gerade Linie eignet sich in höchstem Grade zu Zerlegungen, Vergleichen, Abschätzungen. Dazu kommt, daß sie bei R. in allen ihren Teilen gleiche Werte durch gleiche Längen wiedergibt. Ob Rückle 157

zu 58 oder zu 558 hinzugelegt, überall wird 157 durch eine identische Länge repräsentiert*).

Die Einfachheit des R.schen Zahlendiagramms drückt sich auch darin aus, daß es frei von allem nebensächlichen Ballast immer nur das zeigt, was er gerade von ihm verlangt. Die sonst gänzlich ungeteilte Strecke erscheint, wenn ihm die Zahl 389 genannt wird, an der Stelle, die etwa dem 389. Teilpunkt der in tausend gleiche Einheiten zerlegt gedachten Strecke entspricht, durch einen scharfen senkrechten Schnitt zerschnitten. Höchstens ist durch einen schwächeren Strich noch die Lage von 400 angedeutet und damit 389 als dieser benachbart gekennzeichnet. Eine von R. häufig diagrammatisch ausgeführte Operation, über die an anderer Stelle (Kapitel 4) noch genauer berichtet wird, bewirkt gelegentlich auch das Mitanklingen der Markierung der Zahl 411, die er als das durch Reflexion an 400 erzeugte „Spiegelbild“ von 389 auffaßt.

Es ist selbstverständlich, daß die so veranschaulichte Zahl 389 in dem einfachen ungegliederten Diagramm nicht so eindeutig bestimmt ist, daß nun lediglich auf Grund des Diagramms ein Merken der Zahl erfolgen könnte. Ebenso gut könnte der Teilstrich natürlich auch 388, 390 oder eine andere nahe benachbarte Zahl darstellen. Daß ihm (R.) meist in kleinen grauen Ziffern an dem betreffenden Teilstrich der Wert angeschrieben erscheint, steigert die Verwendbarkeit des Diagramms als Merkhilfe nur wenig. Doch leuchtet ohne weiteres ein, daß die Einprägung des Ziffernbildes allein ein einfacheres Verfahren sein würde. —

*) Der Vorschlag von K. Eckhardt (Z. f. päd. Psychol Bd. 3, S. 1 ff.), Kinder beim Kopfrechnen systematisch an den Gebrauch einer vorgestellten, in 100 gleiche Einheiten zerlegt gedachten Strecke zu gewöhnen, bedeutet nichts anderes, als eine Aufforderung, die Schüler an der Hand eines solchen auf oktroyierten Rechendiagramms elementare Kopfrechenaufgaben (Additionen und Subtraktionen im Zahlenraume bis 100) ausführen zu lassen. Bedenkt man, daß — nach den Resultaten amerikanischer Untersuchungen — etwa 12% aller Menschen ohne äußere Anleitung zur Verwendung von Diagrammen und ähnlichen Erscheinungen kommen, daß ferner nur Visuelle Eckhardts Forderung zu erfüllen imstande sind, so sieht man ohne weiteres, welche psychologischen Grenzen seinem didaktischen Vorschlag gezogen sind.

Aber R.s Diagramm soll ja garnicht dem Merken der Zahl dienen, es ist für ihn nur ein Bild, das für gewisse einfache Rechenoperationen eine brauchbare und geschickt verwendete anschauliche Grundlage liefert (vgl. darüber Kapitel 4). Für das Lernen und Merken von Zahlen stehen ihm, wie die früheren Ausführungen schon andeuteten, präzisere und formenreichere Methoden zur Verfügung. Darum spielt auch das Diagramm im Lernakt bei R. nur dann eine Rolle, wenn das Lernen sich auf diejenigen besonderen operativen Vorgänge gründet, die auch sonst am Diagramm vollzogen werden.

Einstellige Zahlen werden von R. nie diagrammatisch vorgestellt, zweistellige nur selten, bei weitem am häufigsten dreistellige Zahlen. Man wird nicht ohne Grund in der hier zu beobachtenden Bevorzugung der dreistelligen Zahlen ein Analogen zu deren auch beim Lernen und Merken sichtbaren Sonderstellung erblicken.

Diagrammatisches Vorstellen größerer Zahlen beschrieb R. bei unseren Versuchen nur in einem einzigen Fall. Hier erschienen ihm die drei Millionen einer siebenstelligen Zahl als drei schwarze parallele Stäbe von gleicher Länge. R. hatte sich in der betreffenden Zeit eingehend mit der Festigkeit und Elastizität von Stäben befaßt und gab an, daß die Stäbe, an denen er sich innerlich die behandelten Probleme veranschaulichte, genau von der Art gewesen seien, die ihm hier als Repräsentant der Millionen diente. Die sechs übrigen Stellen des Komplexes waren in Ziffern gegeben. Diese gelegentliche Erweiterung seines Diagramms trat wohl nur deshalb auf, weil die Versuche damals die Phänomenologie des absoluten Eindrucks der Größe betrafen, was R. unschwer aus der absichtlichen Gegenüberstellung großer und kleiner Zahlen erkennen mußte*). Es ist anzunehmen, daß

*) Gewisse Zahlen erscheinen an und für sich als klein, andre wieder als groß, genau so, wie einem Menschen gewisse Gewichte als schwer und andre als leicht erscheinen. In solchen Fällen spricht man von einem „absoluten Eindruck“ der Größe, der Schwere usw. Die oben genannten Versuche mit R. sollten feststellen, wann und in welcher besonderen Weise dieser absolute Eindruck seiner Selbstbeobachtung gegeben sei.

diese Erkenntnis sein normales Verhalten beeinflußte und so ein „experimentelles Kunstprodukt“ hervorrief.

Was die Brüche anbetrifft, so kann bei Dezimalbrüchen von entsprechender Stellenzahl eine diagrammatische Veranschaulichung stattfinden, dagegen stellt sich R. gewöhnliche Brüche und gemischte Zahlen stets in geschriebenen Ziffern vor.

Überhaupt spielt bei R.s Lern- und Rechenleistungen das visuelle Erinnerungsbild der Zifferngruppen die bei weitem größte Rolle. Auch dann, wenn ihm die Zahlen akustisch dargeboten werden, pflegt er sie sich — mit den vorhin erwähnten Einschränkungen — auf weißes Papier geschrieben zu vergegenwärtigen. Es erscheint nicht angängig, diese Vergegenwärtigung immer als ein bloßes Vorstellen zu bezeichnen. In sehr vielen Fällen nötigt die Art der Vergegenwärtigung dazu, von subjektiven optischen Anschauungsbildern zu sprechen. Die subjektiven optischen Anschauungsbilder (s. o. A.-B.) waren früher nur in der besonderen Form der Sinnesgedächtniserscheinungen bekannt. Daß sie für manche, übrigens völlig gesunde Individuen eine normale Art der erinnerungs- bezw. phantasiemäßigen Vergegenwärtigung visueller Bewußtseinsinhalte darstellen, zeigte zuerst Urbantschitsch[22]). Erst in der neuesten Zeit setzte dann eine eingehende Untersuchung dieser merkwürdigen Erscheinung ein, die u. a. die qualitative Sonderstellung der s. o. A.-B. erwies[23]). Beim A.-B. handelt es sich jedesmal um ein regelrechtes Wiedersehen; diesem Tatbestand entspricht die Einstellung der Augen sowie die Erscheinungsweise der Bilder, die im allgemeinen gleichzeitig mit den Wahrnehmungsgegenständen der Umgebung in identischen Akten gesehen werden. So scheinen z. B. A.-B. der Oberfläche von Gegenständen der Umgebung aufgelegt; natürlich können sie auch in normaler Sehweite erscheinen, ohne auf einen Hintergrund „projiziert“ zu sein. Aber auch dann glaubt sie ihr Träger im vollsten Sinne des Wortes zu sehen. Man sieht sofort, daß den A.-B. damit die Eigenschaft der Sinnfälligkeit zugesprochen wird, die sie den Wahrnehmungsbildern verwandt macht. Neben dieser allgemeinen Eigenschaft der Sinnfälligkeit scheidet die A.-B. von den Vorstellungsbildern noch eine Reihe

von Merkmalen, die allerdings bei den verschiedenen Individuen in verschiedenem Grade ausgeprägt sind, wie z. B.: Fülle von Einzelheiten und hohe Vorlagetreue. Daneben zeigen sie sich als äußerst beständig, denn sie können von ihrem Träger minutenlang unverändert im Gesichtsfeld festgehalten werden, oft auch als äußerst dauerhaft, d. h. nach langer Zwischenzeit wieder erzeugbar.

Es liegt auf der Hand, daß derartige Individuen im s. v. A.-Bild über eine sehr wertvolle Form des visuellen Gedächtnisses verfügen. Bei R. besitzt das A.-Bild-Gedächtnis einen besonders hohen Rang. R. scheidet scharf zwischen Wiedergesehenem und bloß Vorgestelltem, also zwischen A.-Bild und Vorstellungsbild. Das A.-Bild erscheint ihm wie ein „reelles" Bild, das Vorstellungsbild möchte er demgegenüber als bloß „virtuelles" Bild bezeichnen. In der Tat dünkt mir der Wesensunterschied beider Erscheinungen durch diese Umschreibungen gut charakterisiert zu sein. Bei R. besitzt das A.-Bild-Gedächtnis einen besonders hohen Rang. Es zeigt sämtliche vorhin genannten Eigenschaften in einem ungewöhnlichen Grade der Ausprägung. Daneben ist es durch eine erstaunlich leichte Ansprechbarkeit ausgezeichnet. Ohne Mühe erzeugt er A.-Bilder von mancherlei Vorlagen, soweit die Größe des A.-Bild-Gesichtsfeldes die gleichzeitige Erzeugung aller Bildteile überhaupt zuläßt, auch schon nach sehr kurzer Betrachtungszeit. Ein solches inhaltsreiches und anschauliches Gedächtnisbild, das R. fast beliebig lange im Gesichtsfeld unverändert festhalten kann, ist natürlich eine Gedächtnisgrundlage von höchstem Wert, zumal es bei ihm unter dem Einfluß des Willens mannigfache Veränderungen zuläßt, d. h. völlig jener Starrheit entbehrt, die andere Individuen an ihm oft so störend empfinden müssen.

Von einem vorgelegten Komplex von 6 Ziffern vermag R. ohne jede Schwierigkeit nach einer Betrachtungszeit von kaum einer Sekunde ein deutliches A.-Bild zu erzeugen. In der Regel sieht er im A.-Bilde die Ziffernkomplexe in der Schrift von Frau Geheimrat G. E. Müller, was offenbar darauf zurückzuführen ist, daß die Vorlagen, deren sich G. E. Müller bei seinen ersten

umfangreichen Gedächtnisversuchen mit R. bediente, in dieser Schrift geschrieben waren. Doch ist er auch imstande, die anschaulichen Ziffernbilder in den Schriftzügen der Vorlage zu sehen, aber nur dann, wenn er — etwa auf Grund besondrer Instruktion — zur Beachtung dieser besonderen, ihm sonst gleichgültigen Eigenschaft der Vorlage veranlaßt wird. In starken, tiefdunkeln Lettern gedruckt, sah er bei unsern Versuchen die Ziffern im A.-B. nur in den Fällen, in denen er sie auf einen dunkeln Grund (graues Papier und dergl.) projizieren mußte. Zur Begründung gab er an, daß sich Gedrucktes von einem dunklen Grunde besser abhebe als Geschriebenes. Bloß vorgestellte Ziffern dagegen pflegt er in seiner eigenen Schrift zu sehen. — Auch sieben nebeneinander geschriebene Ziffern vermag er gleichzeitig mit gleichmäßiger völliger Deutlichkeit zu projizieren, sie im buchstäblichen Sinne des Wortes in einem einfachen Sehakt, anscheinend ohne Wanderung der Aufmerksamkeit gleichzeitig bewußt zu sehen. Bei 8 Ziffern scheint für diese Darbietungsart die Grenze der Fähigkeit der gleichzeitigen, deutlichen Vergegenwärtigung zu liegen. Doch vermag R., sofern die Ziffern zu je 5en in 2 Reihen angeordnet sind, auch 10 Ziffern auf einmal mit gleicher Deutlichkeit subjektiv wiederzusehen. Bei diesen Grenzleistungen geschieht die simultane Vergegenwärtigung nun nicht mehr mühelos, sondern ist von einer deutlichen, sensorischen Aufmerksamkeitsleistung begleitet, die sich in Spannungsempfindungen äußert, die R. als „Gefühl einer Vergrößerung des Augenabstandes“ beschreibt. Gemäß der herkömmlichen Terminologie würde man hier also die Grenze seines Aufmerksamkeitsumfanges vor sich haben. — Es leuchtet ein, daß arabische Ziffern ein Material sind, von dem besonders leicht A.-Bilder erzeugt werden können. Nur 10 verschiedene, aus tausendfacher Bekanntschaft vertraute Schriftzeichen kommen als Elemente in Frage. Dem entspricht es ganz, daß R. von anderen Vorlagen (Bildern und kleinen Gegenständen) nur nach bedeutend längerer Betrachtungszeit ein A.-Bild zu erzeugen vermag. Aber auch hier scheinen seine Leistungen kaum hinter den besten anderer erwachsener Eidetiker zurückzustehen. Das zeigte sich z. B. bei Aussageversuchen

über vorgelegte und dann im A.-Bild reproduzierte Bildvorlagen sowie bei der Beschreibung von Maschinen und Maschinenteilen auf Grund von A.-Bildern.

Besonders interessant ist nun der Gebrauch, den R. von seinen A.-Bildern macht. Nicht jedes visuelle Erinnerungsbild trägt bei ihm A.-Bildcharakter. Er verwendet auch Vorstellungsbilder von allen Deutlichkeitsgraden; aber es ist nicht im geringsten zufällig, ob er diese oder jene verwendet; hier soll einstweilen nur angegeben werden, *wann* R. sich beim Lernen und Rechnen der A.-Bilder und wann der Vorstellungsbilder bedient, ohne das *Warum* dieser Auswahl genauer zu analysieren (vergl. Kapitel 8). Wenn R. eine Reihe zu lernen und aufzusagen hat, so ist der Zweck der, die in Komplexe geordneten Glieder dieser Reihe so einzuprägen, daß er sie in bestimmter Aufeinanderfolge sicher und mit möglichst hoher Geschwindigkeit aufzusagen vermag. Es ist klar, daß das Nennen der Reihenglieder umso sicherer erfolgt, je deutlicher das Erinnerungsbild derselben ist. Schon diese Überlegung läßt erwarten, daß gerade bei derartigen Lernversuchen die eidetische Anlage, d. h. die Fähigkeit zur Erzeugung s. o. A.-B., zur Geltung kommt. Das ist in der Tat so, R. bewegt sich gewissermaßen beim Aufsagen in einem visuell gegebenen Stellenschema der Gesamtreihe, das, wenn ihm eine andere Lernweise nicht vorgeschrieben oder durch die Natur des Versuchs nicht nahegelegt wird, sich an die dem Lernakt zu Grunde liegende Reihe eng anschließt und die Glieder dieser Reihe zu Sechserkomplexen zusammenfaßt. Er wandert dann beim Aufsagen von Komplex zu Komplex, wobei jedesmal der gerade vorliegende Komplex mit wahrnehmungsgemäßer Deutlichkeit (als A.-Bild) auftaucht und wieder in das Schema der räumlichen Zuordnungen versinkt, sobald der nächste Komplex als A.-Bild vergegenwärtigt wird. Die mannigfachen Hilfen, mit denen R. die Aufnahme und Verbindung der einzelnen Glieder und Komplexe unterstützt hat, klingen dabei, vor allem an schwierigen Stellen, mit an. Aber sie tragen fast niemals den Charakter von A.-B., sie bleiben flüchtige Vorstellungsbilder von wechselnder, meist nur geringer Deutlichkeit.

Von einer strengen Bindung an eine bestimmte Methode kann bei der Bildung und Verwendung der Hilfen nicht die Rede sein. Vielmehr überwiegt bald mehr die logisch-mathematische, vorstellungsmäßig gegebene Hilfe, bald mehr das visuelle Strukturbild des Komplexes, das als A.-B. auftritt. In der Regel ist der Grad der Beteiligung dieser Komponenten abhängig von der besonderen Art des Komplexes. Ist der Komplex nicht fest eingeprägt, so treten bei seiner Reproduktion die gebildeten Hilfen in Wirkung. Machte aber, was bei R. selten vorkommt, die Bildung derartiger Hilfen Schwierigkeiten oder genügen die gefundenen Hilfen nicht zu einer eindeutigen Bestimmung des Komplexes, so prägt sich R. das visuelle Gesamtbild selbst mit umso größerer psychischer Energie ein. Eindringliche Betrachtung und mehrfache probeweise Projektion ersetzen in einem derartigen Falle die eindeutige logische Bestimmung oder ergänzen eine unzureichende logische Charakterisierung. Die Bedeutung, die die Hilfen für die Wirksamkeit des A.-Bild-Gedächtnisses besitzen, wird später (Kap. 6) eingehender dargelegt werden.

In ähnlicher Weise wirken A.-B. und Vorstellungsbilder auch beim Rechnen zusammen. Das eigentliche Rechnen vollzieht sich bei R. stets in außerordentlicher, bisher anscheinend unerreichter Geschwindigkeit in Vorstellungsbildern. Ist aber die Aufgabe so kompliziert, daß sie in eine Anzahl von Teilaufgaben zerlegt werden muß, deren Ergebnisse bis zur Vereinigung mit anderen Teilresultaten im Gedächtnis behalten werden müssen, so pflegt R. die Vorstellungsbilder der Teilergebnisse in A.-B. umzusetzen. Während der weiteren Rechnung verschwinden sie völlig aus seinem Gesichtsfeld, aber ihm bleibt das beruhigende Bewußtsein, daß er sie, sobald er ihrer bedarf, fast ohne Zeitverlust „wie aus einer Schublade" herausholen und mit vollem Vertrauen zu ihrer Richtigkeit verwenden kann. Über die ökonomische Bedeutung dieses Zusammenwirkens wird an anderer Stelle noch das Nötige gesagt werden (Kap. 8).

Was nun die vorhin als wechselnd gekennzeichnete Deutlichkeit der Vorstellungsbilder anbetrifft, so ist auch sie, wie sich auf Grund eingehender Analyse erweisen ließ, keineswegs zufällig,

vielmehr kann man wohl allgemein sagen: Je bekannter, leichter und geläufiger eine Hilfe (ein Ziffernkomplex) ist, umso flüchtiger und undeutlicher klingt sie (er) bei R. im Vorstellungsbild an. Einerseits spricht sich in dieser Verhaltungsweise ein ungewöhnlicher Grad der Durchführung des Prinzips der Oekonomie aus; zum anderen aber ist nicht zu verkennen, daß sie gelegentlich Irrtümer und Auslassungen im Gefolge haben kann. Dem entsprachen auch völlig die eigenen Beobachtungen R.s sowie die Ergebnisse unserer Untersuchungen. Gerade solche Komplexe, die beim Lernen als besonders leicht erschienen, verursachten beim Aufsagen Auslassungen und Fehler. Allerdings darf nicht unerwähnt bleiben, daß R. gerade diesem möglichen Mangel seiner Arbeitsmethode, wenn auch nicht stets bewußt, so doch systematisch entgegenwirkt durch fortgesetzten Wechsel im Gebrauche der Hilfen. Es widerstrebt ihm, eine ihm schon geläufige Hilfe wieder anzuwenden. Er sucht und findet gewöhnlich mehrere, zum Teil neue Hilfen, die dann bei der Reproduktion ineinandergreifen und eine eindeutige Bestimmung des Komplexes, oft sogar eine „Überbestimmung", herbeiführen. Im folgenden Kapitel wird Gelegenheit sein, diese Tatsache als eins der methodischen Grundprinzipien von R. zu erweisen, als ein Prinzip, dessen Geltung, weit über die beim Lernen und Rechnen mit Zahlen mögliche Anwendung hinausgreifend, auch für sein mathematisches und allgemein wissenschaftliches Arbeiten sich als maßgebend zeigt und in hohem Grade als Ursache der Qualitäten der Eigenartigkeit und Vielseitigkeit anzusprechen ist.

Wie unmittelbar zum Teil mit dem hier gekennzeichneten Zusammenwirken von Vorstellungsbild und A.-B. die Leistungen R.s zusammenhängen, zeigt sich schon, wenn man den Einflüssen nachgeht, denen ihre üblichen Schwankungen unterliegen. R. erreicht vor einem großen Zuhörerkreis trotz seiner Ruhe und erstaunlichen Konzentrationsfähigkeit niemals völlig die besten Lernzeiten. Das ist ohne weiteres verständlich, wenn man bedenkt, wie außerordentlich empfindlich gerade A.-B. gegen störende Sinnesreize zu sein pflegen. Dagegen übertreffen seine Rechenleistungen unter solchen Bedingungen durchweg die im Einzel-

versuch erzielten Resultate. Die anfeuernde Wirkung, die in der Anwesenheit einer größeren Zahl von Zuhörern liegt, vermag wohl den Vorstellungsablauf zu beschleunigen, erweist sich aber nicht imstande, völlig die Hemmungen zu überwinden, die Störungsreize aller Art auf die Erzeugung und Reproduktion von A.-B. ausüben können.

3. Psychologische Analyse der methodischen Grundprinzipien.

Der Versuch, die Formen der Vergegenwärtigung von Zahlen bei R. zu charakterisieren, legte an verschiedenen Stellen die Untersuchung der Frage nahe, warum R. sich bald des einen bald des anderen Mittels der Veranschaulichung von Zahlen bedient. Damit gelangten wir aber schon unmittelbar an Elemente seiner methodischen Grundprinzipien heran, die uns hier genauer beschäftigen sollen.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß die meisten Rechenkünstler sich von starker Leidenschaft zur Zahl hingezogen fühlen. Von Inaudi erfahren wir durch Binet, daß er täglich rechnete und daß seine Leistungen sofort nachließen, wenn er nicht ständig übte. Ein anderer Rechenkünstler, der gegenwärtig in deutschen Städten auftritt, berichtete mir, daß er dauernd rechne, sobald er nicht anderweitig beschäftigt sei. Geradezu grotesk-komische Formen nahm diese Manie für Zahlen bei dem englischen Kopfrechner Jedediah Buxton an. Von ihm berichtet Binet in seinem früher zitierten Buche S. 6 ff. im Anschluß an eine Darstellung von Scripture (American Journal of Psychology, Bd. IV, 1881): „Man hat oft erzählt, bis zu welchem Punkt er die Rechenmanie trieb, indem er durchaus nichts sah als Ziffern und Kopfrechenaufgaben, wobei sein Geist allem Übrigen völlig verschlossen war. Als er nach London kam, um sich dort der Prüfung der Kgl. Akademie zu unterziehen, führte man ihn in das Theater von Drury-Lane, um ihm Richard III., gespielt durch Garrick, zu zeigen. Man fragte ihn dann, ob ihm die Vorstellung Vergnügen gemacht habe; er hatte dort nichts als

eine Gelegenheit zum Rechnen gefunden. Während der Tänze hatte er seine Aufmerksamkeit auf die Zahl der ausgeführten Schritte gerichtet, es waren 5202; er hatte gleicherweise die Zahl der von Garrick ausgesprochenen Wörter gezählt, und alles das wurde als richtig anerkannt."

Von dieser Zahlenmanie finden wir bei R. keine Spur. Daß er Zahlen aller Art (Jahreszahlen und Daten, physikalische Konstanten und mathematische Formeln) in weit größerer Zahl und mit größerer Genauigkeit als andere Menschen wiederzugeben imstande ist, ändert daran nicht das Geringste. Das entspricht nur dem hohen Rang seines Gedächtnisses überhaupt und der Vielseitigkeit seiner Interessen, die ihm gestatten, auch da, wo es sich nicht um Zahlen handelt, gelegentlich Spezialwissenschaftler durch die Fülle und Genauigkeit seines Wissens zu übertreffen. Wie wenig vielmehr die Zahl an und für sich imstande ist, seine Interessen auszufüllen, zeigt im besonderen der Umstand, daß er es geradezu als seine Aufgabe betrachtet, bei Lernversuchen sich die ihm vorgelegten Zahlen erst interessant zu machen. Erst dann, wenn man einen Einblick gewinnt in die Fülle der Methoden, deren R. sich bedient und bedienen muß, um diese Wirkung zu erreichen, erkennt man, wie wenig ihm die Zahl an und für sich bedeutet. Es ist niemals der rohe Ziffernkomplex als solcher, der ihm Interesse abnötigt; auch sind es nicht gewisse äußere Eigenschaften, wie bestimmte Ziffernfolgen und dergl. Auch davon, daß ihm eine Ziffer oder Zahl irgendwie gefühlsmäßig näher stünde als eine andere, kann keine Rede sein. So ist er z. B. völlig frei von Synästhesien (wenn wir von der diagrammatischen Vergegenwärtigung, die er bei Additionen mit dreistelligen Zahlen beschreibt, absehen) wie auch von Symbolisierungen ähnlich denen der Pythagoräer[24]).

Die Zahl ist ihm nur etwas als Trägerin von Eigenschaften; als solche spielen aber für ihn die wesentlichste Rolle die in der Zahl selbst liegenden, ihr immanenten — zahlentheoretischen — Eigenschaften. Während er noch bei der ersten Untersuchung durch G. E. Müller Jahreszahlen, geographische und historische Daten, physikalische Konstanten u. dergl. mit einer gewissen Häufig-

keit als Hilfen anwandte, konnte Müller schon 1912 ein erhebliches Zurücktreten aller derartigen, nicht zahlentheoretischen Hilfen beobachten (Müller II, S. 200). Bei unseren Versuchen trat nur eine Hilfe jener Art und auch diese nicht als einzige Hilfe auf.

So vermeidet er den dem Wesen der Zahl fremden Ballast herangetragener Merkmale, Merkhilfen und Eigenschaften, wie er von gewissen „Gedächtnissystemen" geboten wird. Er bleibt im natürlichen Bereich der Zahl, indem er Zahlen durch Zahlen interessant macht. Dabei ist dieser Prozeß frei von jeder Schablonisierung, Schablonen kehren wieder und sind bestimmt zum handwerksmäßigen Gebrauch. Was R. reizt, sind neue Beziehungen, und diese liegen auch für einen Herrscher im Reiche der Zahlen nicht immer ohne weiteres bereit und an der Oberfläche. Vielmehr steckt in dem Prozeß des Interessantmachens meist eine bedeutende Summe geistiger Arbeit, so sehr, daß wir geradezu jenen Prozeß als eine Vergeistigung des an und für sich spröden und toten Materials betrachten müssen.

In seinem Erfolg kommt dieses Bestreben darauf hinaus, alte Aufgaben mit immer neuen Methoden zu lösen. Es leuchtet ein, wie sehr dadurch R.s Leistungen vor Schematismus bewahrt werden, und man wird nicht ohne Grund die beständig fortschreitende Entwicklung seiner Leistungsfähigkeit der konsequenten Verfolgung jenes Ziels zuschreiben müssen. Gerade auf ihn trifft ein Ausspruch seines Lehrers Felix Klein[23]) zu, demzufolge der Fortschritt der Mathematik sich nicht darauf gründet, daß man neue Probleme mit alten Methoden behandelt, sondern darauf, daß man die alten Probleme mit neuen Methoden zu lösen versucht.

Man wird entgegenhalten, daß nicht jede Zahl eine derartige Bearbeitung erlaubt. Im gewissen Sinne ist das berechtigt; nicht jede Zahl ist zahlentheoretisch betrachtet ein Kuriosum, aber nur selten wird ja auch eine Zahl allein dargeboten. Fast stets tritt sie mit anderen Zahlen gemeinsam auf. In solchen Fällen ermöglicht vielfach die Art der Verbindung der Zahlen einen Ausgleich der Mängel, die sich aus der unbefriedigenden „Uninteressantheit" der isolierten Glieder vielleicht ergeben können.

So ist es auch verständlich, daß die einstelligen Zahlen für R. nur wenig oder nichts bedeuten. Für sie liegen die wenigen Eigenschaften (ob Primzahlen oder nicht, mögliche Primzahlzerlegungen und dergl.) so offensichtlich da, daß sie, wie alles Alltägliche, kein Interesse erwecken können. So erscheint ihm die Zahl 6 als Produkt von 2×3 nüchtern und gleichgültig; erst als Produkt zweier ganzer Zahlen im Zahlkörper K $(\sqrt{5})$*) würde sie für ihn einiges Interesse besitzen. — Ähnliches gilt bezüglich der zweistelligen Zahlen. Auch sie besitzen zu wenige oder zu wenig individualisierende Eigenschaften, als daß sie für gewöhnlich als Elemente seiner Verarbeitung in Betracht kommen könnten. Anders dagegen die dreistelligen Zahlen. Jede von ihnen ist gut charakterisierbar. Jede ist Trägerin einer Anzahl von Eigenschaften. Auf der einen Seite sind diese Eigenschaften so mannigfaltig und R. in so hohem Grade gegenwärtig bezw. mit Hilfe mannigfacher Methoden und Beziehungen so schnell erfahrbar, daß er jederzeit imstande ist, ohne Schwierigkeiten auf Grund dieser Eigenschaften die Zahl zu individualisieren, sie im strengen Sinne als Individuum, das nichts anderes als der Träger jener Eigenschaften ist, aufzufassen. Diese Eigenschaften aber sind bei R. von ganz besonderer Struktur, — womit sie keineswegs als inhaltlich untereinander nahe verwandt gekennzeichnet werden sollen. Im Gegenteil, sie sind, wie die früher mitgeteilten Beispiele zeigen, von überraschender Vielgestaltigkeit. Darum können sie nie nur äußerlich sein. Den meisten Menschen bedeutet die Zahl 333 etwas Besonderes, weil sie dreimal hintereinander die Ziffer 3 bringt, allenfalls noch als Näherungswert für $\frac{1}{3} \times 1000$. Für R. ist sie in erster Linie das Produkt von $3^2 \times 37$. Auch 1001 ist ihm nicht merkwürdig als erste auf tausend folgende Einheit, die überdies äußerlich symmetrisch aufgebaut ist; ihm ist sie das Produkt der aufeinanderfolgenden Primzahlen $7 \times 11 \times 13$ (vgl. Anm. 12) und als solche sowie ihrer für Multiplikationen und Divisionen besonders großen Hand-

*) Hier ist $6 = (1 + \sqrt{5})\,(1 - \sqrt{5})$.

lichkeit wegen eine in mancherlei Proben mit Vorteil verwendbare interessante Zahl.

Schon diese Beispiele, die sich nach Belieben vermehren lassen würden, zeigen, daß die Eigenschaften, die R. zur Individualisierung der Zahlen verwendet, vorzugsweise zahlentheoretischer Natur sind. Daneben aber hat diese Zerlegung größerer Zahlen bezw. Ziffernreihen in meist dreistellige Elemente einen hohen ökonomischen Wert, worauf schon G. E. Müller mit Recht aufmerksam gemacht hat.

In der Individualisierung und der Verknüpfung (Assoziierung) scheinen zwei Operationen nebeneinander herzugehen, die sich in ihrem innersten Wesen widersprechen. Die eine sondert ab, die andere gliedert ein. Aber hier kommen wir an eine der Grundtendenzen der R. schen Arbeitsweise. Soll die Zahl als isoliertes Ganzes lediglich gemerkt werden, dann genügt die Individualisierung, ja der Erfolg wird umso sicherer sein, je vollständiger die Individualisierung vollzogen wird. Anders aber, wenn die Zahl in einem Zusammenhang mit anderen Zahlen auftritt, mit diesen etwa gelernt oder sonstwie verknüpft werden soll. Dann würde ja eine durch zu strenge Individualisierung hervorgerufene Isolierung dem beabsichtigten Erfolg entgegenstehen, die Sonderung würde zur Absonderung führen. Zwar wirkt das topische Gedächtnis R.s[26]), das jeden Lernstoff auch mit den im Material gegebenen räumlichen Beziehungen aufnimmt, einer solchen extremen Isolierung stark entgegen. Aber es würde niemals allein imstande sein, die außerordentlichen Leistungen befriedigend zu erklären. Für R.s Arbeit sind in viel höherem Maße wohldurchdachte, in ihrer Brauchbarkeit erprobte, und auf Ökonomie, d. h. auf Zeit- und Kraftersparnis, abzielende Verfahrungsweisen kennzeichnend, die man im besten Sinne des Wortes als Methoden bezeichnen kann.

Dieser allgemeinen Charakterisierung seiner Methoden als in ihren Grundlagen logischer und in ihrer Wirkung ökonomischer Arbeitsweisen fügt sich auch R.s Individualisierungsmodus ein. Will er Assoziationen zwischen neuem Material stiften, so hat die Individualisierung nur einen Nebenzweck. Sie soll die zu

verknüpfenden Elemente fixieren; der höhere Zweck ist deren Vereinigung zu festen Assoziationen und Assoziationsketten, und darum tritt hier der Teilzweck in den Dienst dieses Hauptzwecks. Das geschieht dadurch, daß die Individualisierung der Verknüpfung vorarbeitet. Von den zur Individualisierung geeigneten Eigenschaften der Zahlen stellt R. nämlich nunmehr diejenigen in den Vordergrund, die in hervorragendem Maße eine Verknüpfung begünstigen oder herbeiführen. So sah er (vergl. S. 17) bei dem Komplex 343 049 von allen anderen Eigenschaften ab und individualisierte 343 als 7^3; 049 als 7^2; aber nicht genug damit, er faßte nun die Glieder im Ganzen zusammen, das sich ihm als Produkt der charakteristischen Primzahl 7001 mit eben der 7^2 darstellte, die bei der Individualisierung der zweiten Dreiergruppe eine Rolle spielte.

Man sieht hier ohne weiteres, wie Charakterisierung des Einzelnen und Verbindung der isolierten Teile zum Ganzen ein einheitliches methodisches Gepräge tragen und unmittelbar zusammenwachsen. Diese Vereinheitlichung ist nicht Resultat eines Zufalls. Wenn auch natürlich nicht überall so deutlich in die Augen springend, so ist sie doch an vielen Stellen klar angedeutet und als methodisches Prinzip unverkennbar. Diese Rolle kann sie aber nur darum spielen, weil R. nicht mit einem detaillierten Formel- und Beziehungsschema an seine Aufgabe herantritt. Die Aufgabe und das Material, das sie bietet, bestimmen vielmehr immer von Schritt zu Schritt die Verfahrensweisen. So erwächst die Methode aus Aufgabe und Material, und nur so kommt jene Resonanz zwischen Material und Methode zustande, die zu einem guten Teile das Geheimnis von R.s Leistungen ist, zum mindesten aber ihnen den Stempel überlegener Beherrschung und künstlerischer Tätigkeit aufdrückt.

Wir werden im Folgenden diesen Tatbestand als die Adäquatheit der Methode bezeichnen. Wir haben sie eben als das Ergebnis einer Orientierung an Aufgabe und Material bezeichnet. Für den ersten Teil dieser Doppelbehauptung sind wir noch den Beweis schuldig. Es ist keineswegs gleichgültig, mit welcher bestimmten Zielsetzung ein gegebenes Material R. vor-

gelegt wird. Ein Beispiel: R. hatte einmal den Komplex 367 861 zu lernen. 367 ist ihm sowohl als Primzahl wie als physikalische Konstante geläufig. Zu der Zahl 861 bringt er sie in Beziehung, indem er sich 1. vergegenwärtigt, daß die Differenz beider ungefähr 500 beträgt, und 2., daß die genaue Differenz (494) durch die charakteristische Primzahl 13 teilbar ist. 861 selbst wird außerdem noch als durch die Primzahl 41 teilbar gekennzeichnet. Es ist wohl zuzugeben, daß der Komplex damit so genau bestimmt ist, daß er beim Versagen des rein visuellen Gedächtnisses aus den logischen Bestimmungen ergänzt, zur Not sogar mit ihrer Hilfe wiedererzeugt werden kann. — In einem anderen Fall wird ihm die Aufgabe 367×758 vorgelegt. Er löst sie, indem er $367 \times 2 \times 379 = 2\ (373+6)\ (373-6) = 2 \times 373^2 - 2 \times 36$ rechnet. Dabei löst in ihm die Aufeinanderfolge der Primzahlen 367, 373, 379 ein intellektuelles Lustgefühl aus. Man sieht sofort, wie hier die gleiche Zahl 367, trotzdem sie als Primzahl weder interessante Faktorenzerlegungen gestattet, noch subtile mathematische Eigenschaften enthält, einen ganz anderen Charakter gewinnt. Im ersten Falle bleibt 367 der markante Bezugspunkt, der unverändert besteht, weil seine Einprägung zur Aufgabe gehört. Im zweiten Fall verwischt sich dieselbe Zahl und geht durch einen Rechenprozeß mit dem anderen Faktor eine innige Verbindung ein.

Ein anderes Beispiel:

148 887 zu merken,
148×185 zu rechnen.

Beide Male kommt zum Bewußtsein, daß 148 in 4×37 zerlegbar ist, wo 37 charakteristische Primzahl der Form $4n+1$ ist. Im ersten Fall tritt aber diese Beziehung völlig zurück. Es überwiegt vielmehr zunächst der Eindruck des Kontrastes mit 887; beide sind dreistellige Zahlen, deren erste der unteren und deren zweite der oberen Grenze der dreistelligen Zahlen nahesteht. 887 stellt sich unmittelbar als angenähertes Sechsfaches von 148 vor und ist selbst Primzahl. Beider Differenz ist ebenfalls wieder eine Primzahl. In der Multiplikationsaufgabe gewinnt die Zerlegung 4×37 praktische Bedeutung, da auch 185 den Faktor 37

enthält; so vereinfacht sich die Rechnung in $4 \times 37 \times 5 \times 37 = 20 \times 37^2 = 27380$.

Aber nicht nur die Aufgabe im allgemeinsten Sinne — sofern sie Lern- oder Rechenaufgabe ist — übt einen Einfluß auf die Methode aus, auch die Größe und Anzahl der auftretenden Zahlen ist von Belang. Das gilt sowohl von Lern- wie von Rechenaufgaben. Während R. sich bei einer kürzeren Ziffernreihe, zumal, wenn sie ihm akustisch schnell dargeboten wird, fast völlig auf sein mechanisches Gedächtnis verläßt (unmittelbares Behalten), pflegt er längere Reihen weit intensiver zu bearbeiten. Er teilt die Reihe in Komplexe zu je 6, löst jeden Komplex in seine beiden dreistelligen Elemente auf, sucht die Eigenschaften der Elemente bezw. der Komplexe, verknüpft die Elemente auf Grund dieser Eigenschaften oder gewisser Beziehungen zu Komplexen, verkettet die Komplexe untereinander nach analogen Methoden, projiziert sie und prüft sich selbst, indem er Aufsageversuche anstellt, sobald er einen größeren Teil oder das Ganze in der gekennzeichneten Art bearbeitet hat. Mit der Schwierigkeit und Länge der Aufgabe steigert sich die Konzentration, vermehren sich die Wiederholungen und Aufsageversuche. Reihenübergänge werden besonders fest eingeprägt, ähnliche Komplexe durch besonders scharfe Individualisierung geschieden usw.

Ähnlich ist es bei Rechenaufgaben. Es braucht wohl nicht betont zu werden, daß R. das Rechnen mit sehr großen Zahlen, so wenig es ihm Schwierigkeiten macht, vermeidet, daß er Faktoren geeignet zusammenfaßt und dergl. Derartige Kunstgriffe, die auch der geringer qualifizierte Rechner kennt und handhabt, gebraucht er selbstverständlich dauernd. Was uns hier vielmehr angeht, sind andere Gesichtspunkte, in denen sich eine überlegene Taktik offenbart.

Ich stellte R. die Aufgabe 212×376. Hier sind zunächst beide Faktoren gleichwertig; beide zu zerlegen, etwa in $(200+12) \times (350+26)$ würde 4 Multiplikationen und die additive Zusammenfassung der Einzelprodukte erfordern. R. greift statt dessen einen Faktor (den Operator) heraus und transformiert ihn so, daß er ein erleichtertes Verfahren gewährleistet. Im vorliegenden

Falle nahm er 376, das er in das Produkt 2×188 zerlegte. Die Aufgabe $2 \times 212 \times 188$ bildete er nun um in die andere $2\ (200+12)\ (200-12) = 2\ (40000-144)$. Das Produkt 2×40000 gibt hier den Endwert in großer Annäherung. So schickt R. ein schätzendes Rechnen (Taxieren) voraus und läßt dann die Verschärfung des Resultats, das Präzisieren, darauf folgen. Die beiden Operationen, Taxieren und Präzisieren, lassen sich bei R. fast überall beobachten. Sie geben dem Verfahren den Charakter der Approximation. Es leuchtet ein, daß in ihnen in der Tat ein Grundzug seiner Taktik liegt*). Das Taxieren gibt ihm die Größenordnung des Resultats und damit die Grundlage für die Gliederung der Zahl in Millionen, Tausende, Einer usw. und das stellenwertrichtige Aussprechen. In der Tat beginnt er denn auch fast stets mit der Wiedergabe des Ergebnisses, sobald er nur die Taxierung beendet hat. Während des Aussprechens bringt er dann die im Gefolge der Präzisierung nötige Korrektur an; das ist möglich, weil die Korrektur infolge ihrer geringen Größe meist nur die letzten Stellen betrifft; wo, wie im vorliegenden Falle, durch die Korrektur auch die ersten Stellen mitbeeinflußt werden, ergeben sich meist keinerlei besondere Schwierigkeiten. Denn auch den Größenwert der anzubringenden Korrektur bestimmt R. zunächst schätzungsweise, um damit die Grundlage für eine Beurteilung der Veränderung des rohen Wertes durch jene zu gewinnen.

Wie schnell sich diese einzelnen, zum Teil nebeneinander herlaufenden Operationen abspielen, davon wird an anderer Stelle

*) Bei derartigen Aufgaben liegt in der Tat für R. das taktische Problem in der Forderung, ein möglichst kleines ε zu bestimmen, das an einem möglichst leicht zu findenden Annäherungswert als Korrektur anzubringen ist. Vom Standpunkte der Mathematik aus ergeben sich bei dieser Formulierung 2 bemerkenswerte Tatsachen: Einmal weist seine Methode hin auf jene, in der heutigen Mathematik bei Grenzwertbestimmungen übliche Verfahrenweise, bestimmte Differenzen möglichst klein („kleiner als ein beliebig vorgegebenes ε bezw. $\varepsilon/2$") zu machen. Zum andern aber zeigt sich so sehr deutlich, daß seine Überlegungen den Charakter von Variationsrechnungen tragen, bei denen 2 gegebene Minimalbedingungen möglichst gut erfüllt sein müssen. Wie kennzeichnend derartige Tatsachen für die Höhe und Spezifizität der mathematischen Begabung R.s sind, bedarf keines besonderen Hinweises.

(Kapitel 5) eingehender berichtet werden. Es braucht wohl kaum gesagt zu werden, wie sehr durch dieses taktische Vorgehen dem Rechnen der Charakter des Mechanischen und Formelhaften genommen wird, zumal, wenn man berücksichtigt, wie sehr auch hier das bewährte Prinzip, dem gestellten Problem immer möglichst von einer neuen Seite beizukommen, zu ausgiebigen Variationen führt.

Dem aus ökonomischen Tendenzen erwachsenden Bestreben nach taktischem Vorgehen entspringt auch R.s Bevorzugung der Multiplikation. Wie er durch approximatives Vorgehen, durch systematische Folge von Taxieren und Präzisieren, intuitiver Abschätzung und intellektueller Kleinarbeit, die Häufung lästiger Additionen und Subtraktionen vermeidet, das zeigten schon unsere bisherigen Ausführungen. Daß die Division mit den bei ihrer Ausführung notwendigen Subtraktionen mit vielfachen Zehnerüberschreitungen nur hin und wieder wirklich elegante Lösungen zuläßt, leuchtet ein und macht ohne weiteres verständlich, daß er sie nach Kräften vermeidet. Ja, man kann geradezu sagen, daß er auch da, wo die Aufgabe eine Division als unumgänglich nötig erscheinen läßt, nicht im eigentlichen Sinne des Wortes dividiert; vielmehr verwendet er dann ein probierendes Multiplikationsverfahren, indem er das, durch Multiplikation eines durch Taxieren bestimmten Quotienten mit dem in der Aufgabe gegebenen Divisor erhaltene Produkt mit dem Dividendus vergleicht, aufs neue probiert oder bei befriedigender Annäherung, die er zumeist schon beim ersten Versuch erreicht, das Resultat schrittweise verschärft. Genau besehen, trägt ja jedes, auch das schriftliche, Dividieren einen verwandten Charakter. Nur in wenigen Fällen, nämlich dann, wenn die zur Division abgeteilten Stellen des Dividenden genaue Vielfache des Divisors sind, besteht hier die feste Zuordnung zweier Zahlen, die für die drei anderen elementaren Operationen charakteristisch ist; in allen anderen Fällen ist ein Zurückgehen auf das nächstniedrige ganzzahlige Vielfache und damit ein, wenn auch oft nur angedeutetes, Zurückgehen auf die Multiplikation als primäre Operation nötig. Was bei R. auch hier überrascht, ist die Sicherheit und Genauig-

113920

keit, mit der er bei vielstelligen Dividenden und Divisoren jene erste Abschätzung vornimmt und zwar auch in den Fällen, in denen der Quotient eine mehrstellige Zahl ist. Diese Abschätzung ist aber nichts anderes als ein „tatonnierendes" Multiplizieren.

Die starke Bevorzugung der Multiplikation bietet ihm große Vorteile. Sie gestattet ihm Faktorenzerlegungen und Vereinfachungen mancherlei Art. Besondere Vorteile fließen ihm natürlich aus dem kommutativen Gesetz der Multiplikation, aus der Vertauschbarkeit der Faktoren, zu. Gerade dann, wenn eine größere Anzahl von Faktoren vorliegt, greift er aus dem visuellen Bilde, das ihm vorschwebt, diejenigen zunächst heraus, deren Vereinigung die weiteren Operationen erleichtert. So gewinnt er oft während der Lösung einer Aufgabe besonders günstige Bedingungen und ist vor allem imstande, die Operationen mit großen Zahlen an geeignetster Stelle vorzunehmen.

Ein Beispiel:

$$539 \times 1547$$
$$= 11 \times 7^2 \times 13 \times 119$$
$$= (11 \times 7 \times 13) \quad (7 \times 119) =$$
$$1001 \quad \times \quad 833 \quad = 833\,833.$$

Welche Rolle bei dieser Verschiebung der Faktoren sein visuelles Vorstellungsgedächtnis spielt, braucht wohl kaum gesagt zu werden. Dem Bedürfnis, die Faktoren und überhaupt alle Glieder der Zwischenrechnungen ohne besondere Rekonstruktionsoperationen (längeres Besinnen, flüchtiges Wiederdurchrechnen) wieder gegenwärtig zu haben, pflegt er dadurch Rechnung zu tragen, daß er diese Bestandteile der Aufgabe bezw. Lösung als Anschauungsbilder projiziert. Sie stehen ihm dann mit gleicher Gefügigkeit zur Hand, wie etwa die Ziffernkomplexe gelernter Reihen.

Derartige Verfahrensweisen üben in ihrer konsequenten Befolgung und virtuosen Ausbildung geradezu ästhetische Wirkungen aus und drücken R.s Rechenoperationen den Charakter des Eleganten auf. Es ist immer wieder eine Freude, der sich auch R. keineswegs selbst entzieht, zu sehen, wie Schweres durch einen einfachen Kunstgriff leicht gemacht wird. So fand er gelegentlich, als er mit der Zahl π zu multiplizieren hatte, eine

einfache Formel, die ihm ohne Schwierigkeiten eine Genauigkeit bis auf 5 Dezimalen gewährleistete. Er fand, daß $\pi = 3{,}14159 = {}^{22}/_{7}$ (dem bekannten rohen Annäherungswert) vermindert um das 0,0004 fache von ${}^{22}/_{7}$ sei. So setzte er an die Stelle einer Multiplikation mit einer sechsstelligen Zahl Multiplikationen mit zwei- bezw. einstelligen Zahlen. Auch hier ist die Aufeinanderfolge von Taxieren und Präzisieren erkennbar. R. selbst gibt als Kennzeichen einer eleganten Methode an, daß sie 1. einen neuen und kurzen Weg darstellt, 2. daß weittragende Mittel in geeigneter Zusammenstellung zur Lösung verwandt werden und daß sie 3. ökonomischen Gesichtspunkten in jeder Hinsicht genügt. Was R. bestimmte, auch das unter 2 angegebene Merkmal zu erwähnen, war wohl die sicher richtige Erwägung, daß die Verwendung kleiner Mittelchen, die fernab von der Heerstraße der klassischen Methoden marschieren, einer Lösung den Charakter des Eleganten gar zu leicht nehmen kann. Schon jene gewisse Vornehmheit, die wir der Eleganz im besseren Sinne immer zuzuerkennen bereit sind, verlangt den Verzicht auf Behelfe niederen Ranges. Diese Eleganz der Methode ist aber nicht nur für den Hörer, sondern auch für R. selbst Quelle ästhetischen Genusses und wirkt darum mit an der Interessantmachung des Materials.

So sehr nun auch solche taktischen und ästhetischen, also im letzten Grunde formalen, Gesichtspunkte in R.s Arbeitsweise zur Geltung kommen, so wenig führen sie ihn hinaus aus der spezifisch mathematischen Behandlungsweise. Schon das, was wir vorhin als die Adäquatheit der Methode bezeichneten, muß ihn im Bereich der durch Materie und Aufgabe gezogenen natürlichen Grenzen halten. Aber diese Wirkung ist keine zufällige. Es liegt eine auf die Forderungen des mathematischen Gewissens gegründete Tendenz vor, nichts zur Hilfe heranzuziehen, was nicht durch die besondere Natur des Problems gefordert erscheint. Das ist auch der tiefere Grund, weshalb R. alle die Kunstgriffe und Hilfen ablehnt, die in den Systemen der Gedächtniskünstler einen so breiten Raum einnehmen. So sehr ihm Daten historischer und literarischer Art, naturwissenschaftliche Konstanten und geographische Zahlen zu Gebote stehen, so wenig verwendet er

sie als Merkhilfen. Er ist sich dessen bewußt, daß er mit solchen Beziehungen etwas dem Wesen seiner Aufgabe Fremdes herantragen würde, kurzum, er wahrt die Reinheit der Methode. Natürlich ist es bei der hohen Präsenz seines Gedächtnisses unvermeidlich, daß derartige Beziehungen oft mit anklingen, aber er drängt sie bewußt zurück und bleibt dabei auch hier der Mathematiker. Gerade dieser Umstand ist es, der den zahlentheoretisch gegründeten Hilfen die bevorzugte Stellung einräumt. Wie sehr andererseits die Einheitlichkeit der Lern- und Arbeitsmethoden, von der trotz ihrer unerschöpfbaren Mannigfaltigkeit gesprochen werden muß, und damit ihr innerer Zusammenhang durch die Beobachtung dieses Prinzips gewahrt wird, ist leicht einzusehen.

In gewissem Sinne ergibt sich, daß das Streben nach der Reinheit der Methode für R. ein übergeordnetes Prinzip darstellt, von dem sowohl seine taktischen Maßnahmen wie die auf die Adäquatheit der Methode abzielenden Verfahrensweisen im weiten Umfange dirigiert werden.

Bei der Reichhaltigkeit, mit der R. brauchbare adäquate Methoden zur Verfügung stehen, darf es nicht Wunder nehmen, daß ihm deren Fülle gelegentlich lästig werden kann. Nicht immer ist es bei der flüchtigen Vergleichung der einzelnen Möglichkeiten, die er in solchen Fällen vorzunehmen pflegt, sofort erkennbar, welche Verfahrungsweise sich im weiteren Verfolg der Aufgabe als die brauchbarste, ökonomischste und eleganteste erweist. Alsdann kann es vorkommen, daß er den Verlauf der einzelnen Lösungen probeweise weiter verfolgt, als dem rein zeitökonomischen Gesichtspunkt günstig ist. Er pflegt in solchen Fällen von einem Wettstreit der Methoden zu sprechen. — Natürlich ist auch der Fall denkbar, daß eine während der Lösung erst auftauchende neue Lösungsmöglichkeit ihn verleitet, die schon begonnene Rechnung zu unterbrechen und sie nach der neuen Methode, die dann meist den Vorzug höherer Eleganz besitzt, wieder von vorn in Angriff zu nehmen. Auch dadurch können Verzögerungen und Hemmungen eintreten, die imstande sind, die für Aufgaben von gleicher Schwierigkeit sonst üblichen Zeiten zu verlängern.

Beispiel:

$$382 \times 725$$

Er setzt zuerst an $2900/4 \times 382$, zieht dann vor zu rechnen $(700+25)\times 382$. Statt dessen wählt er als einfacher $(400-18) \times 725$.

Auch diese Möglichkeit verfolgt er nicht bis zum Schluß, sondern rechnet dann endgültig in der viel eleganteren Methode:

$$\begin{aligned} & 191 \times 725 \times 2 \\ = \; & 191 \times 1450 \\ = \; & 10\ (168+23)\ (168-23) \\ = \; & 10\ (168^2 - 23^2) \\ = \; & 276\ 950. \end{aligned}$$

4. Veranschaulichte und nichtveranschaulichte Operationen.

Wenn wir hier von nichtveranschaulichten Operationen sprechen, so bedarf das einer kurzen Vorbemerkung. In diesem Zusammenhange in eine Erörterung der Frage nach der Existenz und der phänomenologischen Gegebenheit von im üblichen Sinne unanschaulichen Bewußtseinsprozessen (Gedanken, Bewußtheiten, Bewußtseinslagen) einzutreten, wäre ohne erhebliche theoretische Belastung des Ganzen nicht möglich. Die Frage soll daher aus der Betrachtung ausgeschieden werden und das Augenmerk lediglich auf die in Vorstellungen aller Art gegebenen psychischen Erscheinungen beschränkt bleiben.

Vielmehr werden wir hier von dem Worte Anschauung in ungefähr demselben Sinne Gebrauch machen, wie es die Schule tut. Eine veranschaulichte (d. h. durch Vermittlung der Anschauung ausgeführte) Operation sei eine solche, bei der die Aufgabe oder ihre Lösung nicht nur in einer bezeichnenden (etwa durch Ziffern), sondern in einer illustrierenden Weise gegeben ist. Veranschaulichung setze also jedesmal eine solche Illustrierung voraus. Demgemäß werden wir von einer nichtveranschaulichten Operation zu reden haben, wenn R. sich z. B. beim Rechnen vorgestellter

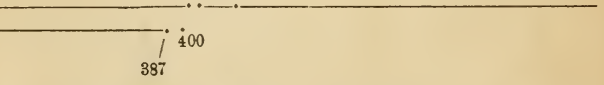
Ziffernbilder bedient; eine Veranschaulichung liegt dagegen vor, wenn er auf sein Diagramm oder eine ähnliche Hilfe, bei der die Größen durch irgend ein Bild dargestellt sind, zurückgreift.

Wir hatten in Kap. 2 den Nachweis versucht, daß R.s Diagramm ein Rechendiagramm ist. In der Tat findet es bei gewissen Rechenoperationen eine ausgedehnte und geschickte Verwendung. Die Enge des Bereichs, den es umfaßt (1—1000), schränkt natürlich seine Verwendung wesentlich ein. Für Multiplikationen und Divisionen, die in diesem Zahlenraum von R. etwa mit der Leichtigkeit und Geschwindigkeit ausgeführt werden wie entsprechende Eineroperationen von normalen Erwachsenen, kann es keine Rolle spielen. Seine Heranziehung würde hier nichts als eine Belastung, eine unerwünschte Vergeudung psychischer Energie, darstellen. Dafür aber findet es bei Additionen und Subtraktionen umso ausgedehntere Verwendung.

Beispiele für diagrammatische Addition:

1. $455 + 387$.

455 erscheint im Diagramm, nur 400 und 455 sind durch entsprechend liegende Teilstriche angedeutet. 387 wird als $400 - 13$ aufgefaßt, wobei 400 und 387 markiert sind. 400 lagert sich dicht neben die erste 400, sodaß der erste Teil des Diagrammbildes doppelt erscheint. Nun denkt sich R. 13 an 400 gespiegelt und erhält so folgendes Gesamtbild:



Er liest denn aus seinem Bilde das Resultat $2 \times 400 + 55 - 13 = 842$ ab. Das Ganze vollzieht sich in dieser, sowie auch der nächsten Aufgabe so schnell, daß er das Resultat kaum eine Sekunde nach vollendetem Aussprechen der Aufgabe zu geben vermag.

2. 657 + 278.

Hier legt er unmittelbar an die Strecke 600 die 300 Einheiten entsprechende Strecke an und addiert zu der erhaltenen 900 die Differenz 57 — 22.

Bei anderen Beispielen, bei denen mehr als zwei Summanden auftraten, vollzog er meist die Addition der beiden ersten diagrammatisch; die weiteren Additionen aber, indem er sich die Zahlen wie beim schriftlichen Rechnen unter das erste Teilresultat geschrieben vorstellte. Alsdann addierte er das Ganze.

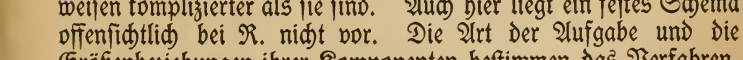
Beispiele für diagrammatische Subtraktion:

3. 1000 — 367.

Hier findet kein eigentliches Rechnen mehr statt; die Komplemente einer Zahl zu 1000 sind ihm so geläufig, daß ihm das Resultat ohne weiteres gegenwärtig ist, etwa mit der Sicherheit, mit der der normale Erwachsene auf die Aufgabe 4 + ? = 10 antwortet.

4. 822 — 365.

800 und 822 sind im Diagramm markiert. Im ersten Teil der Strecke erscheint 365 abgetragen. Zu 435, das so anschaulich gegeben ist, wird dann rein ziffernmäßig 22 addiert.



In der ausführlichen Darstellung scheinen die Verfahrensweisen komplizierter als sie sind. Auch hier liegt ein festes Schema offensichtlich bei R. nicht vor. Die Art der Aufgabe und die Größenbeziehungen ihrer Komponenten bestimmen das Verfahren. Dafür ist die im ersten Beispiel gekennzeichnete Überlagerung der beiden gleichen Hunderter bemerkenswert; an deren Stelle tritt im zweiten schon die Aneinanderlagerung der ungleichen Hunderter. Die für das vierte Beispiel charakteristische Subtraktion von vorn aus erscheint auch höchst zweckmäßig, wenn man bedenkt, daß nur so die Reststrecke 457 als ungeteiltes Ganzes auftreten konnte, ohne daß bei der Subtraktion die umständliche Operation ...22 — 65 ausgeführt zu werden brauchte.

Eine besondere Bedeutung besitzt für R. das Diagramm bei der Bestimmung des arithmetischen Mittels, das, wie unsere früheren Beispiele schon zeigten, bei der Multiplikation sehr oft herangezogen wird. In der früher (S. 41) erwähnten Aufgabe 382×725 rechnet er z. B. wie folgt:

$$191 \times 1450 = 10\ (168+23)\ (168-23)$$

und hat dann, da ihm die Quadrate von 168 und 23 völlig geläufig sind, sofort das Resultat 276950.

Hier ist mit den Zahlen 191 und 145, die diagrammatisch angedeutet sind, ohne weiteres das arithmetische Mittel 168 gegeben. Ein Berechnen desselben, etwa gar durch Addition und nachträgliche Division durch 2 findet nicht statt. Auch die Halbierung der Differenz $(191.-145)$ ist ziffernmäßig nicht einmal angedeutet. Die ungefähre Größenordnung folgt aus dem vorgestellten Bilde; die zur genaueren Bestimmung notwendige letzte Ziffer ergibt sich aus der Beachtung der Endziffern 11 und 5 unmittelbar.

Ein weiteres Beispiel:

$$367 \times 758.$$

Das Resultat ist 3 Sekunden nach Aussprechen der Aufgabe da.

Verfahren: $367 \times 379 \times 2 = (373-6)\ (373+6)\ 2.$

Auch hier erscheinen die Zahlen 367, 373 und 379 im Diagramm. Die Aufeinanderfolge der drei benachbarten Primzahlen löst bei R. eine ästhetische Befriedigung aus.

Aber, so wird man fragen, wozu die diagrammatische Veranschaulichung? Ein Kopfrechner vom Range R.s wird auch ohne diese Hilfe mindestens ebenso schnell zum Resultat kommen. Daß das in der Tat der Fall ist, bewiesen Versuche, bei denen das diagrammatische Rechnen absichtlich unterdrückt wurde, was ohne Schwierigkeiten gelang. Was R. bestimmt, jene Veranschaulichungen vorzunehmen, ist ein gewisses ästhetisches Bedürfnis, das ihn auch sonst häufig veranlaßt, auf die unmittelbare Anschauung zurückzugreifen, eine Tatsache, die überhaupt bei Individuen mit hochentwickelten visuellen Fähigkeiten (Eidetikern) häufig in die Erscheinung tritt. Bedenkt man überdies, wie wenig

das Rechnen an und für sich für ihn Selbstzweck ist, wie gerade sein Interesse und seine Begabung darin sich finden, Rechenakte tunlichst zu vermeiden, so wird verständlich, wie sehr ihm das Ablesen von Diagrammen sympathisch sein muß. — Zudem aber belebt für ihn der Wechsel von Ziffern- und Streckenrechnen den ganzen Arbeitsprozeß in anregendster Weise, ein Faktor, der dann letzten Endes wieder im Sinne einer Erhöhung der Leistungsfähigkeit wirkt.

Abgesehen von diesen diagrammatischen Operationen wandte R. Veranschaulichungen bei einfacheren Aufgaben nur selten an. Eine viel höhere Bedeutung gewinnt die Veranschaulichung dagegen bei der Bearbeitung physikalischer und technischer Probleme. Hier gehen bei R. regelmäßig sowohl die Ansätze zu Differentialgleichungen wie auch die Interpretationen der Resultate theoretischer Erwägungen mit anschaulicher Vergegenwärtigung spezieller Fälle Hand in Hand.

Dazu mag die hervorragende Eignung der Physik zur mathematischen Formulierung überhaupt wie vor allem der Umstand beigetragen haben, daß für R. in Anbetracht seiner beruflichen Tätigkeit, die ihn fortgesetzt experimentelle theoretische Physik mit mathematischer Analyse verbinden läßt, jene Verbindung ganz besonders natürlich und eng erscheinen muß. So schildert er auch seine psychischen Erlebnisse (Kap. 7) mit Vorliebe in physikalischen Bildern.

Je enger sich diese Illustrationen nun an eine erlebte oder mögliche Erfahrung anlehnen, desto deutlicher ist das Vorstellungsbild und desto leichter pflegt es aufzutreten. Er selbst äußerte sich darüber bei verschiedenen Gelegenheiten. „Die Natürlichkeit des Bildes ist von Vorteil.“ „Der Stempel der Unwahrscheinlichkeit schwächt die Deutlichkeit des Bildes.“

Nötig ist vor allem auch hier wieder jene schon früher (Kap. 3) erwähnte Adäquatheit. „Es muß dazu passen.“ „Der Charakter der Zweckmäßigkeit ist für die Deutlichkeit des Vorgestellten außerordentlich förderlich.“

An einem Beispiel, das zwar zu unseren Rechenversuchen keine direkten Beziehungen hat, mag die Wirksamkeit dieser Ten-

denzen gezeigt werden. Bei einer im Rahmen der Untersuchung angestellten Analyse seiner s. o. A.-Bilder forderte ich R. auf, das A.-Bild eines Zahnradgetriebes auf den breiten weißen Rand eines Bildes zu projizieren, das an der Wand hing. Die Projektion war möglich, aber nicht ohne Anwendung gewisser „Zwangskräfte", weil das Bewußtsein störte, daß eine so schwere Eisenmasse die Verglasung des Bildes zertrümmern müsse. — Ein anderes Mal wurde R. aufgefordert, das A.-Bild eines kleinen Tischchens in die Ecke des Zimmers zu projizieren. Dort hing aber ein Mantel, der von einem wirklichen Tischchen hätte gefaltet werden müssen. Da aber das gleichzeitig mit dem A.-Bild im Gesichtsfeld gegebene Wahrnehmungsbild des Mantels derartige Deformationen nicht aufwies, so erschien das Tischbild in den Mantel hineingeschoben. Auch das widersprach der Erfahrungsmöglichkeit und erschwerte die Erfüllung der Instruktion. Sobald die starke Anspannung, deren es bedurfte, nachließ, rückte das Bild des Tischchens „wie von Federkraft geschnellt" so weit ins Innere des Zimmers, daß eine „Berührung" mit dem Mantel gerade nicht mehr bestand.

Offenbar sprechen sich in diesen Beobachtungen Grundzüge der geistigen Struktur R.s aus. Eine Neigung zur Orientierung am Empirischen, mindestens zur Illustrierung, soweit sie durch Erfahrungsgemäßheit sinnvoll erscheint, ist für ihn auf allen Gebieten unverkennbar.

Eine besondere Bedeutung gewinnt die Veranschaulichung für R. bei der Behandlung von Problemen der Bewegungslehre. Er begnügt sich nie mit der bloßen Berechnung der dabei auftretenden Bewegungsvorgänge, sondern stellt sie sich auch anschaulich vor. Handelt es sich dabei um mehrfache kompliziertere Bewegungen, so pflegt er sich selbst nacheinander in die einzelnen Bewegungsbahnen einzudenken, er dreht und bewegt sich im Geiste auf ihnen und stellt sich die anderen Bewegungen von diesem vorgestellten Standpunkte aus gesehen vor. Er ist sich selbst darüber völlig klar, wie sehr gerade durch solche bis zur völligen Geläufigkeit wiederholten Versuche die Einsicht in das Werden und den Verlauf der betrachteten Bewegungsvorgänge

gesteigert, wie aber auch der formale Zweck der Übung und Steigerung seiner Visualität dabei erreicht wird.

Eine weit höhere Rolle als die veranschaulichten Operationen spielen bei R. die unveranschaulichten Rechenvorgänge, die er zumeist mit Hilfe von visuell vergegenwärtigten Ziffernbildern vollzieht. Wie schon früher erwähnt, können dieselben sowohl im A.-Bild wie im Vorstellungsbild erscheinen. Im ersteren Falle sieht er sie deutlich und gut gruppiert, so wie sie ihm aus den von G. E. Müller angestellten systematischen Gedächtnisversuchen geläufig waren. Seine Vorstellungsbilder dagegen sind viel matter, sie erscheinen in eigener kleiner Schrift in allen Deutlichkeitsgraden, immer zu je dreien von der letzten Stelle aus abgeteilt. Nullenreihen sind dabei meist durch horizontale Striche angedeutet, von denen jeder etwa den Raum einer Gruppe von drei Ziffern einnimmt. Wenn R. im Kopf Rechnungen ausführt, so ist die Anordnung der Ziffern im Vorstellungsbild im wesentlichen dieselbe wie beim schriftlichen Rechnen. Demgemäß erscheinen sie meist mit Bleistift auf weißem Papier geschrieben. Von einer genauen Vergegenwärtigung aller Zwischenstufen und Einzelschritte kann dabei für ihn weder beim Kopfrechnen noch beim schriftlichen Rechnen die Rede sein. Es sind immer nur bestimmte, aus der einheitlichen Zusammenfassung mehrerer Operationen hervorgehende Zwischenresultate, die er sowohl beim schriftlichen Rechnen notiert, wie auch beim Kopfrechnen visuell vergegenwärtigt. Steigt deren Größe und Anzahl über eine gewisse Grenze hinaus, läßt sich insbesondere nicht die sofortige Weiterbearbeitung der Teilresultate ermöglichen, sodaß erst an einer späteren Stelle auf sie zurückgegriffen werden muß, so pflegt er sie als Anschauungsbilder zu projizieren und gewinnt damit die Möglichkeit, sie nachher augenblicklich mit voller Genauigkeit wieder zu vergegenwärtigen.

5. Statistisches über R.s Rechenleistungen.

Nachdem wir früher (Kapitel 1) R.s Gedächtnisleistungen an der Hand der Feststellungen G. E. Müllers, F. E. O. Schultzes sowie eigener Versuche beschrieben hatten, wenden

wir uns nun zu der Darstellung seiner Rechenleistungen. Es mag bemerkt werden, daß die Versuche durchweg am Abend, nach arbeitsreichem Tage, angestellt wurden, und daß die stimulierende Wirkung des großen Auditoriums fehlte. Die Annahme, daß unter anderen Bedingungen (völlige geistige Frische und größerer Zuhörerkreis) die Leistungen noch höher steigen würden, erscheint begründet, ja, sie ist sogar in mehrfacher Hinsicht durch einen gelegentlichen Vergleich unserer Ergebnisse mit den anläßlich eines öffentlichen Vortrags erzielten Leistungen experimentell gestützt. R. war übrigens bei Anstellung unserer Versuche keineswegs besonders gut in Übung, da ihm weder die Kriegsjahre noch die darauf folgende intensive Berufsarbeit Zeit und Gelegenheit zur systematischen Übung seiner Rechenfähigkeit gegeben hatten.

Die Versuche wurden teils mit visueller, teils mit akustischer Darbietung der Aufgabe angestellt. Die mit der Stoppuhr gemessenen Zeiten geben im ersten Falle meistens die Zeiträume von der visuellen Darbietung der vorher in normaler Leseentfernung niedergelegten und verdeckten Aufgabe bis zum Beginne des Aussprechens des Resultats*). Bei akustischen Versuchen gab der Versuchsleiter die Aufgabe an und begann die Zeitmessung, sobald die letzte Ziffer der Aufgabe ausgesprochen war, sodaß also hier die Darbietungszeit der Aufgabe nicht mitgemessen wurde. Die angegebenen Zeiten sind Durchschnittswerte, die, wenn nichts anderes bemerkt ist, aus 8 durch Losen bestimmten Aufgaben gewonnen sind.

Zur Multiplikation zweier dreistelliger Zahlen (Typus 679 $\times$ 432) gebraucht er bei akustischer Darbietung im Durchschnitt 4,08 Sekunden, bei visueller Darbietung 4,1 Sek. ($n = 8$). Die gefundenen Durchschnittszeiten stimmen also mit hoher Genauigkeit überein, doch ist die Streuungsbreite der Zeiten bei akustischer Darbietung merklich größer als bei visueller Darbietung. — Eine Erklärung dafür ergibt sich unschwer aus der Selbstbeobachtung. Die bei visueller Darbietung mögliche, fast simultane Erfassung der beiden Faktoren gestattet ihm, sofort den für

*) Ich hatte Herrn Dr. R. gebeten, mit dem Aussprechen des Resultates erst nach abgeschlossener Lösung der Aufgabe zu beginnen.

die Zerlegungen am besten geeigneten Faktor, den Operator, herauszugreifen und so die Lösung unmittelbar zu beginnen. Bei akustischer Darbietung besteht eine gewisse Tendenz, den zuerst genannten Faktor schon während der Darbietung auf seine Verwendungsfähigkeit als Operator zu betrachten. Zeigt der zweite Faktor ungünstigere Verwendungsfähigkeit, so bewirkt diese Tendenz eine Vorbereitung, die der Lösungszeit zugute kommt und sich in Minimalzeiten (in unseren Fällen bis 2,6 Sek.) äußert. Erweist sich dagegen der zweite Faktor als geeigneterer Operator, so fällt die geschilderte Begünstigung der akustischen Darbietungsweise fort. Vielmehr kann dann sogar durch eine zu lange hinausgezogene Vergleichung der beiden Faktoren auf ihre Geeignetheit als Operatoren eine Steigerung der Lösungszeit eintreten, sodaß dann Maximalzeiten entstehen (in einem Fall bis 7,2 Sek.).

Binet fand (a. a. O. S. 90 u. 98), daß Inaudi zur Lösung derartiger Aufgaben im Mittel 6,4 Sek. gebrauchte. Bei der Bestimmung dieser Zeit verfuhr er folgendermaßen. Er legte Inaudi 5 Aufgaben vor, bei denen eine bestimmte dreistellige Zahl der Reihe nach mit 5 verschiedenen anderen dreistelligen Zahlen zu multiplizieren war und maß die Zeit vom Augenblick des Vorlegens bis zum vollendeten Aussprechen des letzten Resultats. Um eine sichere Vergleichsgrundlage zu gewinnen, gab ich R. dieselben Aufgaben. Er löste sie in 24 Sek., benötigte also 4,8 Sek. pro Aufgabe.

Wurden in derselben Weise R. 5 Aufgaben vorgelegt, bei denen in unmittelbarer Folge 5 verschiedene vierstellige Multiplikatoren mit einem bestimmten vierstelligen Multiplikanden zu multiplizieren (Typus 6241×3635) und die Resultate zu nennen waren, so brauchte R. vom Beginn des Versuchs bis nach vollendetem Aussprechen des letzten Resultats 64,5 Sek., also im Durchschnitt 12,9 Sek. Inaudi gebrauchte unter gleichen Bedingungen durchschnittlich 21 Sek.

Erst recht zeigt sich die Überlegenheit R.s, wenn man an die Multiplikation beliebiger fünf- und sechsstelliger Zahlen herangeht.

Für die Multiplikation 2 er beliebiger fünfstelliger Zahlen (Typus 32978×62834) gebraucht R. z. B. im Durchschnitt 29 Sek. gegen 40 bei Inaudi.

Es mag erwähnt werden, daß R. bei unsern Versuchen auch u. a. 2 beliebige achtstellige Zahlen völlig richtig im Kopf multiplizierte, eine Leistung, bei der Inaudis Zahlengedächtnis wahrscheinlich versagt hätte.

Leider besteht keine Möglichkeit, die offenbar hervorragenden Rechenleistungen Dases[27]), für den Gauß[28]) — selbst ein glänzender Kopfrechner — besondres Interesse bekundete, zum Vergleich heranzuziehen, da wir bei ihm weder bezgl. der Auswahl der Aufgaben noch hinsichtlich der Art der Lösung genügend genaue Angaben besitzen. Doch deutet alles darauf hin, daß wir es bei ihm mit einem Kopfrechner von hoher Konzentration und starker Unermüdbarkeit zu tun haben; wird doch von ihm berichtet, daß er einst zwei 100 stellige Zahlen im Kopfe multiplizierte und dazu $8\,^3/_4$ Stunden gebrauchte.

Die Beobachtung, daß bei R. visuelle und akustische Darbietung im Durchschnitt nur verschwindend geringe Unterschiede ergaben, bestätigte sich auch bei dem anderen mitgeteilten Material. Im folgenden soll stets nur die für akustische Darbietung errechnete Durchschnittszeit mitgeteilt werden, was um so mehr erlaubt ist, als hier bei den Quadrierungen die Schwankungsbreite geringer war, wie schon aus dem Umstand, daß nunmehr keine Operatorenwahl unter zwei Faktoren zu treffen ist, hervorgeht.

Die Quadrate dreistelliger Zahlen (Typus $647)^2$ hat R. jederzeit gegenwärtig. Niemals überschritt hier die Lösungszeit eine Sekunde, öfter aber war sie mit Hilfe der Stoppuhr überhaupt nicht meßbar. Eine Durchschnittszeit von 0,5 Sek. kann sicher nicht als zu gering betrachtet werden*). Für die Quadrate beliebiger vierstelliger Zahlen (Typus $3578)^2$ ergab sich die Zeit von 2,53 Sek., für beliebige fünfstellige 4,9 und für sechsstellige 12,6 Sek. Natürlich bereitet die Ausrechnung auch größerer Quadrate R. keine Schwierigkeiten.

*) Bei diesen Aufgaben ist der Wert immer aus 8 verschiedenen Aufgaben berechnet.

Vergleicht man die gefundenen Zeitwerte, so muß auffallen, daß die Multiplikation zweier dreistelliger Zahlen ungleicher Größe fast so viel Zeit erfordert wie die Quadrierung einer fünfstelligen Zahl, und merklich länger dauert als die Quadrierung von vierstelligen Zahlen. Doch erklärt sich dieser Umstand hinlänglich aus dem angewandten Verfahren, das die verschiedene Schwierigkeit beider Aufgabenarten deutlich zum Ausdruck bringt. In der Regel berechnet R. die Quadrate nach der Formel $(a \pm b)^2$. Er zerlegt also die gegebene Basis in zwei Summanden a und b, wobei er a so wählt, daß sowohl a^2 wie auch $2ab$ möglichst leicht gefunden werden können. Dabei ist das Bestreben unverkennbar, b möglichst klein zu wählen, so daß der Wert b^2 nur eine relativ kleine Korrektur darstellt, die an dem Wert $a^2 + 2ab$ bezw. $a^2 - 2ab$ anzutragen ist und noch während des Aussprechens des Resultates vorgenommen werden kann. Auch hier ist demnach die geschickte Wahl der Bezugszahl, die wir früher als ein methodisch-taktisches Grundprinzip aufzeigen konnten, eine Wesensursache des Erfolges. So kommt es, daß auf die eigentliche Lösungszeit meist nur die Bestimmung von $a^2 \pm 2ab$ entfällt. Von diesen Werten ist ihm aber nach dem oben Angegebenen a^2, sofern a eine dreistellige Zahl oder — was für ihn keine Erschwerung bedeutet — ein dezimales Vielfaches einer dreistelligen Zahl darstellt, fast augenblicklich gegenwärtig. Besonderes Augenmerk braucht er dann nur dem doppelten Produkt $2ab$ zuzuwenden, dessen Bestimmung in der Regel den schwierigsten Teil der Quadratberechnung bedeutet. Sobald dieses aber nicht, wie etwa bei den Quadraten sechsstelliger Zahlen, durch Multiplikation zweier dreistelliger Zahlen gewonnen zu werden braucht, ist seine Berechnung immer noch leichter als die der vorhin zum Vergleich herangezogenen Multiplikationen, so daß die erstaunliche Kürze der Lösungszeit bei Quadrierungen verständlich ist.

Die dritten Potenzen zweistelliger Zahlen (Typus 67)^3 erforderten im Durchschnitt 0,9 Sek., bei dreistelligen Zahlen gebrauchte R. dagegen 8 Sek. Bedenkt man, daß die ersteren zu Resultaten führen, deren Größenordnung derjenigen der Quadrate dreistelliger Zahlen entspricht und daß letztere sich etwa im Bereich

der Quadrate vierstelliger Zahlen bewegen, so wird beim Vergleich der entsprechenden Zeiten ersichtlich, wie wenig für R. die Größenordnung der Zahlen an und für sich bedeutet, wie viel dagegen die Anzahl und Art der auszuführenden Operationen.

Vierte und höhere Potenzen bringen, soweit sich nicht ihre logarithmische Berechnung empfiehlt, nichts wesentlich Neues, da ihre Bestimmung nur eine wiederholte Anwendung der für zweite und dritte Potenzen maßgebenden Methoden darstellt.

Bei der Berechnung von Wurzeln ohne Anwendung von Logarithmen bestehen bezüglich der Zeit weitgehende Unterschiede. Geht die Wurzel ganzzahlig auf, d. h. ergibt sie keinen Rest, so findet R. ihren Wert natürlich bedeutend schneller, als wenn er mit Resten zu operieren hat. Im letzteren Falle erfordert naturgemäß die bloße Bestimmung des Restes weniger Zeit als eine auf zwei oder mehr Dezimalen genaue Restberücksichtigung. Daneben aber liefert ihm gerade hier seine Vertrautheit mit algebraischen und zahlentheoretischen Beziehungen einen ergiebigen Vorrat an abkürzenden Methoden, über die Herr R. selbst noch zu berichten beabsichtigt. Auch dieser Faktor muß natürlich die im Material gegebene ungleichmäßige Verteilung der Schwierigkeiten für ihn um ein Bedeutendes vergröbern, sodaß die bei visueller und akustischer Darbietung zu beobachtenden Schwankungsbreiten dazu nötigen, von der Berechnung von Durchschnittswerten abzusehen. Statt dessen sollen hier die gefundenen Extremwerte angegeben werden.

Ganzzahlige aufgehende zweite Wurzeln aus fünf- bis sechsstelligen Zahlen (die Wurzel ist dann jedesmal eine dreistellige ganze Zahl) erforderten eine Lösungszeit von 0,4—2 Sek. (Durchschnitt: 1 Sek.); bei nichtaufgehenden Wurzelaufgaben gleicher Größenordnung, bei denen der übrig bleibende Rest anzugeben war, schwankten die Zeiten zwischen 3,6 und 8,4 Sek. (Durchschnitt 5,5 Sek.); für zweite Wurzeln aus sieben- bezw. achtstelligen Zahlen (mit vierstelligen ganzzahligen Lösungen) brauchte R. 1—3 Sek. — Hier schon tritt deutlich in die Erscheinung, welche Erschwerung der Aufgabe darin liegen muß, daß eine Wurzel nicht aufgeht. Dieses Moment wird noch eindringlicher beleuchtet

durch Versuche mit größeren Wurzelexponenten. Je größer der Wurzelexponent, desto kleiner ist für Radikanden gleicher Größenordnung die berechnete Basis, aber desto größer im Durchschnitt der Rest. Vier- bis sechsstellige Radikanden haben bekanntlich als dritte Wurzeln zweistellige, sieben- bis neunstellige Radikanden nur dreistellige Zahlen. Aus der Betrachtung der ersten Zifferngruppe des von rechts aus in Gruppen zu je drei Stellen abgeteilten Radikanden erhält R. ohne weiteres die erste Stelle, aus der Betrachtung der Endziffer folgt bei aufgehenden Lösungen unmittelbar die letzte Ziffer der Wurzel, da bekanntlich die Endziffern dritter Potenzen jeden Wert von 0, 1, 2 ..... 9 annehmen können (mathem. ausgedrückt ein vollständiges Restsystem ergeben)*) und zwar so, daß jeder Endziffer eine ganz bestimmte Wurzelendziffer entspricht nach dem Schema:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	8	7	4	5	6	3	2	9	0,

wobei die erste Reihe die Wurzel- und die zweite die zugehörige Radikandenendziffer angibt. Daraus folgt, daß die Bestimmung dritter Wurzeln für R. außerordentlich leicht sein muß. Dem entspricht, daß er für aufgehende Wurzeln dieser Art die geringen, fast konstanten Werte 1—1,4 Sek. brauchte. Für nichtaufgehende Wurzeln gleicher Art und Größenordnung benötigte er dagegen 1,4—5,0 Sek. — Für aufgehende dritte Wurzeln aus sieben- bis neunstelligen Zahlen bestimmten wir als Grenzwerte 5,4 und 8,8 Sek. Hier trat die Erschwerung hinzu, daß die mittlere Ziffer des dreistelligen Resultats bestimmt werden mußte, was meist durch numerische Interpolation nach besonderen, hier nicht zu erörternden Methoden geschah.

Bei vierten Wurzeln liegen die Verhältnisse wieder komplizierter. Bestimmt R. zweimal die zweite Wurzel, so vermehrt er die Anzahl der auszuführenden Operationen. Übrigens würde ein derartiges Verfahren nur für aufgehende Wurzeln sinnvoll erscheinen. Bei direkter Bestimmung der vierten Wurzel aber

*) Das gilt von allen Primzahlexponenten.

beeinträchtigt die Vieldeutigkeit der Endziffern die Anwendung vereinfachender Kunstgriffe, wie aus dem Zuordnungsschema

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	6	1	6	5	6	1	6	1	0

ohne weiteres hervorgeht.

Zwar ermöglicht hier die Berücksichtigung der beiden Endziffern des Radikanden wieder die Anwendung bequemerer Methoden, doch ist auch dann eine ideale Eindeutigkeit nicht vorhanden.

Demnach könnte man annehmen, daß jene Rechenkünstler, die mit Nachdruck in ihrem Programm versichern, daß sie zur schnellen Berechnung vierter Wurzeln aus fünf- bis achtstelligen Zahlen imstande seien, verhältnismäßig schwierige Aufgaben lösen. Was sie zur Wahl der vierten Wurzeln bestimmt, ist etwas anderes. Dem ganzen Bereich der fünf- bis achtstelligen Zahlen entsprechen nur die 90 vierten Wurzelwerte von 10—99, d. h. aber, der ganze Bereich enthält nur 90 Radikanden, die zur Not auch ein Mensch mit mäßigem Gedächtnis auswendig lernen oder doch genügend sicher mit den zugehörigen Wurzeln assoziieren kann. Was diese Leute hindert, nicht die fünften Wurzeln aus sechs- bis zehnstelligen Zahlen, die auch sämtlich im Bereiche 10—99 liegen müssen, zum Objekt ihrer Scheinleistungen zu machen, ist nur der Umstand, daß hier ein einigermaßen aufmerksamer Zuhörer notwendig mißtrauisch werden müßte. Denn hier stimmen die Endziffern der (aufgehenden) Radikanden und der zugehörigen Wurzeln sogar völlig überein, Schema:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Damit sind die Einer der Lösung also in der Aufgabe gegeben*). Zu lernen bleibt dann nur zur Berechnung der Zehnerstelle die Größenordnung der 5. Potenzen der Zahlen von 1—9. Daß R. diese einfachen Kniffe kennt und verachtet, braucht wohl nicht gesagt zu werden.

*) Das gilt bekanntlich für alle Primzahl-Exponenten von der Form $4n + 1$.

In allen angegebenen Fällen wurde R. von vornherein mitgeteilt, ob die Aufgabe ganzzahlig aufging oder nicht. Darin lag, mindestens für die aufgehenden Wurzelaufgaben, eine Erleichterung, da nur auf dieser Grundlage die Verwendung vieler abkürzender Methoden möglich ist. Fehlt dieser Hinweis, so müssen in der Regel auch diese Aufgaben so behandelt werden, wie nichtaufgehende, und nur die fehlende Nötigung zur Bestimmung eines Restes gibt ihnen einen geringen Vorzug. Nichtaufgehende Wurzeln mit größeren Radikanden sowie Lösungen mit Dezimalenangaben errechnet R. in der Regel logarithmisch. Hierbei kommt ihm zustatten, daß ihm aus langjährigem Gebrauch die fünfstelligen Logarithmen der Zahlen bis 100 geläufig sind und daß er auch auf Grund der ihm bekannten Differenzenwerte der Logarithmen mit höheren Stellenzahlen genügend genau operieren kann. Die scharfsinnigen und gewandt benutzten Methoden, durch die er dem in den einzelnen Abschnitten eines eingegrenzten Bereiches verschieden starken Wachstum der Differenzenwerte Rechnung trägt, erfordern zu ihrer Darlegung zum Teil umständlichere mathematische Überlegungen, weshalb hier auf deren Mitteilung verzichtet werden soll.

Ein einziges kleines Beispiel mag sein Verfahren veranschaulichen.

Aufgabe: $\sqrt[7]{37051.}$

R. weiß: Log. 37000 = 4,56820

„ 38000 = 4,57978

Differenz: 0,01158. Er rechnet statt dessen unter Berücksichtigung des möglichen Genauigkeitsgrades 0,01160. Die im Numerus gegebene Differenz von 51 zerlegt er in 50 + 1. Für 50, d. i. ein Zwanzigstel der Gesamtdifferenz 1000, errechnet er $1/20 \times 0{,}01160 = 0{,}00058$, dazu addiert er (für den Rest 1) 2 % des Wertes = 0,00001 und erhält so 0,00059. Da nun die logarithmische Reihe in der ersten Hälfte der Differenz 1000 (zwischen 37000 und 38000) schneller wächst als in der zweiten, gibt er noch 0,00001 hinzu und bekommt so als Logarithmus von 37051 den Wert 4,56880. Diesen dividiert er durch 7 und bestimmt zum Resultat den Numerus.

Eine Würdigung für sich verdienen die Primzahluntersuchungen, die R. im Kopf ausführt. So untersucht er mühelos den Primzahlcharakter beliebiger sechs- und mehrstelliger Zahlen. Ferner bestimmt er die beiden Quadrate, deren Summe gleich einer beliebig vorgegebenen Primzahl der Form $4n+1$ ist. Dazu brauchte er bei beliebigen sechsstelligen Primzahlen in unseren Versuchen Zeiten von 25 – 50 Sek. Desgl. errechnet er auch diejenigen 4 Quadrate, deren Summe zu je zweien den Wert einer Zahl der Form $(4n+1)\,(4m+1)$ ergeben, wo beide Klammerausdrücke Primzahlen der Form $4n+1$ darstellen. — Über die von ihm selbst auf Grund zahlentheoretischer Überlegungen ausgearbeiteten Verfahrensweisen beabsichtigt R. selbst andernorts Genaueres mitzuteilen.

Dagegen soll hier noch auf eine besondere Art von Zerlegungen fünf- und mehrstelliger Zahlen Bezug genommen werden, die bereits Binet sowohl als auch G. E. Müller in ihren Untersuchungen berücksichtigten.

Nach einem zahlentheoretischen Satz ist jede ganze Zahl aus der Summe von 4 Quadraten ganzer Zahlen herstellbar. Die meisten Zahlen gestatten mehrere derartige Zerlegungen, sodaß Aufgaben dieser Art nicht notwendig völlige Eindeutigkeit besitzen. Manche Zahlen lassen sich als die Summe von 3 Quadraten darstellen, andre wieder schon von 2 Quadraten. Doch ist auch bei den zuletzt genannten Arten eine Zerlegung in die Summe von 4 Quadraten möglich.

Binet legte (a. a. O. S. 78) Inaudi u. a. die Zahl 13411 vor. Nach 3 Minuten nannte Inaudi die Lösung 115, 13, 4, 1, deren Quadrate $(13225+169+16+1)$ in der Tat zusammen 13411 ergeben. Eine weitere Lösung fand J. eine Minute später. Bei einem zweitem Versuche benötigte er sogar 15 Minuten.

Schon diese beiden Beispiele beweisen, wie stark bei Aufgaben dieser Art die Lösungszeiten schwanken müssen; das gilt ganz besonders dann, wenn das eingeschlagene Verfahren — wie bei Inaudi — ein reines Probieren (Tatonnement) ist. Auch R. löst derartige Aufgaben im wesentlichen tatonnierend. Doch gibt ihm seine intime Kenntnis der Zahlentheorie sehr oft Mittel an die

Hand, mit deren Hilfe er die Anzahl der durchzuprobierenden Kombinationen einzuschränken und damit die Auswahl zu beschleunigen vermag. Da aber diese Erleichterungen nur unregelmäßig auftreten, so sind auch für R. starke Schwankungen in den Lösungszeiten selbstverständlich. Umsomehr muß betont werden, daß er bei unsern Versuchen in keinem Falle mehr als 35 Sek. gebrauchte, sehr oft aber schon nach 3 Sek. die richtige Lösung ausgesprochen hatte. Trotz der Bedenken, die angesichts so erheblicher Streuungen der Bestimmung von Durchschnittswerten entgegenstehen müssen, haben wir mehrfach aus 10 fortlaufend zu lösenden, visuell gegebenen Aufgaben Durchschnittswerte errechnet. Dabei verfuhren wir nach dem Vorgang G. E. Müllers (I, S. 224 ff. und II, S. 211), doch mit der Abweichung, daß wir sämtliche 10 Aufgaben gleichzeitig vorlegten und R. aufforderten, die Aufgaben der Reihe nach zu lösen, jede Lösung laut auszusprechen und hierauf sofort die nächste Aufgabe in Angriff zu nehmen. Unter diesen Bedingungen zerlegte er einmal sämtliche 10 fünfstelligen Zahlen völlig richtig in 125 Sek. Niemals gebrauchte er mehr als 185 Sek. für 10 derartige Aufgaben. — Binet erwähnt (a. a. O. S. 78), daß der bekannte französische Zahlentheoretiker Lebesgue zugab, zur Lösung einer derartigen Aufgabe 2 Wochen zu benötigen. Angesichts dieser krassen Übertreibung müssen wir G. E. Müller zustimmen, wenn er bemerkt (I, 1, S. 225): „Zwei Wochen für die Erledigung einer Aufgabe, die R. in weniger als 1 Minute löst, ist etwas viel."

Gewiß wird gerade der Nichtmathematiker die Leistung R.s unbegreiflich finden. Doch zeigt eine kurze Überlegung, welche Erleichterungen bei solchen Aufgaben für R. bestehen müssen. Ihm sind ja die Quadrate der dreistelligen Zahlen so genau bekannt bezw. für ihn so leicht bestimmbar, daß er mühelos die Wurzel derjenigen Quadratzahl findet, die in der gegebenen Zahl gerade noch enthalten ist. (Man vgl. das Beispiel Binets, wo für 13411 die Zahl $115^2 = 13225$ die nächstniedrige Quadratzahl ist.) R. geht von der meist zutreffenden Voraussetzung aus, daß der dann noch verbleibende verhältnismäßig kleine Rest (im angezogenen Beispiel 186) in die Summe 3er Quadrate zerleg-

bar ist. Trifft die Annahme zu, dann ist die Aufgabe so gut wie gelöst. Im andern Fall geht R. von einer andern, aber gleichfalls nahe benachbarten Quadratzahl aus und wiederholt dieses Verfahren solange, bis er eine geeignete Zerlegung gefunden hat. Schwierigkeiten entstehen dabei nur für gewisse Primzahlen (z. B. solche der Form $8n+7$). Aber auch in diesen Fällen hat er geeignete Methoden zur Hand, die eine schnelle Lösung der Aufgabe ermöglichen.

6. Hilfen.[29])

Wir haben hier zwischen Lern- und Rechenhilfen zu scheiden. Über R.s Lernhilfen hat G. E. Müller schon ausführlich berichtet. Hier sollen nur, um einen anschaulichen Eindruck von der Vielgestaltigkeit der Hilfen zu geben, die R. beim Ziffernlernen zur Verfügung stehen, an der Hand des früher (S. 7) als Rekordleistung erwähnten Beispiels einer 102-Ziffernreihe die Reihe selbst und das von R. im unmittelbaren Anschluß an das Hersagen zu Protokoll gegebene Hilfenmaterial mitgeteilt werden.

Die Reihe bestand aus 17 Sechserkomplexen, die in der abgedruckten Anordnung gegeben waren.

798588	154077	124731	551538	983863	809496
225967	918841	246920	822719	522507	367861
103274	481693	343049	506523	455369.	

R. gab als Hilfen zu Protokoll:

1. Komplex: Gemeinsamer Faktor der beiden Komplexhälften 7; die zweite Gruppe 588 zudem durch 7^2 teilbar.

2. Komplex: $154 = 2 \times 77$.

3. Komplex: Auch hier kehrt die 7 wieder. Den Rest verbindet die Beziehung $4 \times 31 = 124$.

Der 4. Komplex wird der Größenordnung seiner Teile wegen zur zweiten Hälfte des ersten Komplexes in Beziehung gebracht. Die Differenz beider Teile ist die charakteristische Primzahl 13.

5. Beide Komplexteile sind Primzahlen. Ihre Differenz ist 120. 983 war zudem vorher in einem anderen Zusammenhang vorgekommen und noch in Erinnerung.

6. 809 schließt sich als Primzahl gleicher Größenordnung an 863 unmittelbar an. Die Differenz $54 = 2 \times 3^3$; $496 = 4 \times 124$ wird zum dritten Komplex in Beziehung gebracht.

7. Der Größenkontrast zwischen den beiden Komplexteilen fällt auf. Das ungefähre Wertverhältnis 1 : 4 wird registriert. $225 = 15^2$. Zudem tritt 967 zu 983 in Beziehung. Beide sind zu 1000 benachbart; wird 983 als $1000 - \epsilon$ betrachtet, so kann man 967 als $100 - 2\epsilon$ ansehen. Daß 983^2 ungefähr $= 967\,000$ ist, klingt dabei an.

8. 918 bleibt um 49 hinter 967 zurück. Das ist aber $= 7^2$, das vorhin als Teiler der in der Vorlage über 967 stehenden Zahl 588 gemerkt wurde. $841 = 29^2$. Die Differenz $918 - 841 = 77 = 7 \times 11$.

9. Den Komplex hält die Beziehung $20 \times 46 = 920$ zusammen; 246 hat den charakteristischen Teiler 41.

10. 822 ist Vielfaches der Primzahl 137, die als Teiler von 10001 besondere Bedeutung besitzt. Die Differenz von $822 - 719 = 103$; sie tritt auch im 13. Komplex auf. Beide Komplexteile erscheinen im übrigen ähnlich. (Große und benachbarte Hunderterziffer, Zahlenwert der beiden anderen Stellen klein und ebenfalls benachbart.)

11. Der Komplex erinnert an den vierten; 522 ist um 300 kleiner als 822. Die Differenz der beiden Komplexhälften = 15 (vgl. 4).

12. 367 ist bekannt als Primzahl und physikalische Konstante, von 861 um fast 500 verschieden, die genaue Differenz durch 13 teilbar. 861 enthält wieder den Teiler 41 (vgl. 9).

13. Die Primzahl 103 trat als Differenz der beiden Komplexhälften schon bei 10 auf. $274 = 1/3$ der dort ebenfalls auftretenden Komplexhälfte 822.

14. $481 = 13 \times 37$. Die Differenz beider Komplexteile $= 212 = 4 \times 53$.

15. $343 = 7^3$; $49 = 7^2$; $343049 = 7001 \times 7^2$.

16. Wird zu 11 und 4 in Beziehung gebracht. Alle drei sind ihrer Ähnlichkeit wegen stark visuell bearbeitet (mehrfach

probeweise als A.-Bilder projiziert) worden. Die Differenz von 506 und 523 ist die Primzahl 17; 23 steckt als Teiler in 506.

17. 455 hat die Faktoren 7 und 13, ist also Vielfaches von 91. 369 ist von angenähert gleicher Größenordnung und gleich $3^2 \times 41$, das damit zum dritten Male als Primteiler wiederkehrt. 369 erinnert an und verbindet sich mit 367.

Natürlich wäre R. imstande, die Zahl der angegebenen Hilfen noch um ein Beträchtliches zu vermehren. Er war aber instruiert worden, nur diejenigen Hilfen zu nennen, die auch tatsächlich beim Lernen eine mehr oder weniger wichtige Rolle gespielt hatten.

Die Bedeutung der einzelnen Hilfen für den Lernakt ist von Fall zu Fall verschieden. Oft klingen sie nur spontan an; oft aber werden sie auch bewußt aufgesucht, insbesondere dann, wenn bei probeweisen Auffageversuchen des Ganzen oder eines Teils sich die Notwendigkeit intensiver Bearbeitung eines besonders spröden Komplexes oder der Fixierung einer unzuverlässigen Assoziation ergibt. Ihre Hauptaufgabe erfüllen sie, was seltsam klingen mag, nicht beim Auffagen, sondern beim Lernen selbst. In ihnen verkörpert sich der Prozeß des Interessantmachens. — Sie sind für R. weniger ein Mittel als eine Voraussetzung erfolgreichen Lernens. Das Auffagen erfolgt bei ihm meist sehr schnell; eine Reihe von der Länge der obigen sagte er gelegentlich in 29 Sekunden auf. Es ist selbstverständlich, daß dabei nicht von einem regelrechten Zurückgehen auf alle die genannten Beziehungen die Rede sein kann. Wohl klingen sie hier oder dort mehr oder weniger deutlich an. Die Grundlage für das Auffagen aber bleibt das visuelle Gedächtnis in der besonderen Form des A.-Bildgedächtnisses und das Schema der räumlichen Zuordnungen der einzelnen Komplexe.

Aber daß dieses visuelle Gedächtnis so ausgezeichnet arbeitet, das hat in den Hilfen seine Voraussetzung. Gerade das A.-Bild-Gedächtnis erweist sich in vielen Fällen in hohem Grade deutlich von Selektionstendenzen abhängig. Die von Jaensch[30]) erstmalig beschriebene philotrope Selektionstendenz kennzeichnet die für manche Individuen bestehende Abhängigkeit der Fähigkeit zur Erzeugung

s. o. A.-Bilder vom Grade des Interesses für den wiederzugebenden Stoff. Auch bei R. scheint diese Tendenz zu bestehen. Wohl ist sein A.-Bild-Gedächtnis im wesentlichen vom Willen abhängig; trotzdem zeigt sich aber auch bei ihm die Bedeutung der Mitwirkung des Interesses für das Zustandekommen jener Höchstleistungen, die bei Versuchen wie dem mitgeteilten erstrebt wurden. Aufgabe der Hilfen ist es, dieses Interesse zu erzeugen.

Aber darüber hinaus wirken die Hilfen gelegentlich auch mit beim Auffagen. Versagt das visuelle Gedächtnis, so wird auf jene nicht in A.-Bildern, sondern meist nur in Vorstellungsbildern gegebenen Zahlenbeziehungen, die in den Hilfen festgelegt sind, zurückgegriffen. Und aus den einzelnen Bestimmungsstücken ist dann in der Regel eine eindeutige Ergänzung oder Korrektur möglich. Eine solche Verwendung der Hilfen aber erfordert viel mehr Zeit, als sonst beim Auffagen zur Verfügung steht. Jedesmal, wenn R. beim Auffagen auf derlei Hilfen zurückgreift, läßt sich infolgedessen das Auftreten kleinerer Pausen oder deutliche Verlangsamung des Auffagetempos feststellen.

Was nun die phänomenologische Gegebenheit der Lernhilfen anbetrifft, so ist sie soeben schon als eine vorstellungsbildmäßige gekennzeichnet worden. Die Zahlen, in denen die Beziehungen manifestiert sind, die in den Hilfen zum Ausdruck kommen, pflegt R. mit kleinen grauen Ziffern in dem Schema des Gesamtbildes der Reihe an denjenigen Stellen vorzustellen, an denen sie auftreten bezw. gebraucht werden. Beziehungen zwischen entfernteren Komplexen deuten sich in dünnen, grauen Strichen an, die diese Komplexe miteinander verbinden.

Auch beim Auffagen können diese Ziffern und Zeichen mit angedeutet sein. In der Regel treten sie aber dann neben dem A.-Bild des jeweils vorherrschenden Komplexbildes fast völlig zurück. Deutlicher sind sie meist nur, wohl schon wegen der beim Lernakt herbeigeführten Hervorhebung, an den Stellen der Unsicherheit. Volle Deutlichkeit erlangen sie erst dann, wenn sie tatsächlich als ultima ratio in den Prozeß des Auffagens einzugreifen haben.

Ihrer Verwendung nach sind drei Arten von Hilfen zu untersuchen:

1. Solche, die auf die Fixierung des einzelnen Komplexteiles, also meist einer der dreistelligen Zifferngruppen, abzielen. Sie sind, mathematisch betrachtet, im wesentlichen mit einer Primfaktorenzerlegung der Gruppe identisch.

2. Hilfen, die die Verbindung der beiden Komplexhälften zum Gesamtkomplex zu bewerkstelligen haben; in ihnen schlägt sich das Gleich, Größer und Kleiner der beiden aufeinander bezogenen Hälften nieder, aber auch die Größe der etwaigen Differenz, deren zahlentheoretische Eigenschaften sowie vor allem die unter 1 erwähnten zahlentheoretischen Eigenschaften, soweit sie, weil verwandt, ähnlich oder polar, besondere assoziierende Kraft besitzen. Hierher gehören auch diejenigen Hilfen, die den Komplex als Ganzes, ganz abgesehen von den Eigenschaften seiner Teile, charakterisieren.

3. Hilfen, die die Aufgabe haben, benachbarte oder nichtbenachbarte Komplexe in Beziehung zu bringen. Sie erfüllen meistens die Funktion, ähnliche Komplexe als zwar ähnlich, aber doch in ihrer Verschiedenheit gut und sicher charakterisiert, zu kennzeichnen.

Nehmen wir auf unsere früheren Ausführungen (Kapitel 2) Bezug, so ergibt sich, daß die unter 1 genannten Hilfen im Dienste der Individualisierung stehen. Trotzdem ist unverkennbar, wie wenig diese Individualisierung Selbstzweck ist. Aus der Fülle der möglichen Eigenschaften der Komplexteile sind fast durchweg nur diejenigen herausgegriffen, die eine Verbindung mit dem zugehörigen Komplexteile oder mit anderen Komplexen gestatten. Damit treten die hierher gehörigen Hilfen in den Dienst der Assoziierung und erfüllen damit zugleich die Aufgabe der Hilfen zweiter Art. Das stimmt völlig zu den eben erwähnten früheren Bemerkungen über das Zusammenwirken von Individualisierung und Assoziation (vgl. S. 32). Sind die Hilfen erster Art auch, rein logisch betrachtet, den unter 2 bezw. 3 genannten Hilfen im allgemeinen untergeordnet, so ist doch nicht zu verkennen, daß sie daneben jenen insofern völlig gleichzustellen sind, als auch sie im

Dienste des für den Einprägungsakt so wichtigen Prozesses des Interessantmachens stehen. Denn interessant ist für R. jede in der Zahl liegende oder zwischen Zahlen bestehende Beziehung. Und von deren Mannigfaltigkeit gibt unser Beispiel einen wohl ziemlich überzeugenden Eindruck.

Mit welcher Geschwindigkeit ihm derlei Hilfen zur Verfügung stehen, mag noch an einem weiteren Beispiel gezeigt werden.

R. lernte folgendes 25er-Karree in 7,2 Sek.

5 7 2 4 0
3 4 9 0 1
6 8 1 8 7
2 5 3 9 7
4 1 6 3 6

Nach erfolgtem richtigen Auffagen bat ich ihn um Angabe der Hilfen, die ihm beim Lernen bewußt geworden seien. Er nannte hierauf die folgenden Hilfen:

1. Komplex: $240^2 = 57600$; das Quadrat der 3 letzten Ziffern beginnt mit den beiden ersten Stellen des Komplexes.
2. Komplex: $34 = 2 \times 17$
   $901 = 53 \times 17$.
3. Komplex: $68 = 2^2 \times 17$
   $187 = 11 \times 17$.
4. Komplex: $25 = 5^2$; $397 = 19^2 + 6^2$.
5. Komplex: $41 = 5^2 + 4^2$; $636 = 12 \times 53$; dabei kommt zum Bewußtsein, daß auch der 4. Komplex infolge der Summenzerlegung den Wert 36 enthält.

In 7,2 Sek. ein Karree von 25 Ziffern visuell einprägen und dabei so viele ausgezeichnete Hilfen an das Material heranbringen, ist jedenfalls eine außerordentliche Leistung.

Wenn wir vorhin R.s Hilfen erster Art als in gewisser Hinsicht im Dienste der Hilfen zweiter und dritter Art stehend erkannten, so bringt schon diese Tatsache zum Ausdruck, daß es vorwiegend ähnliche oder verwandte Eigenschaften sein müssen, die bei der

Auswahl der Hilfen zur Geltung kommen. Zieht man zum Vergleich unser Beispiel heran, so zeigt sich sofort, wie sehr die Ähnlichkeitsbeziehungen vorwiegen. Aber es ist nicht zu verkennen, daß der Begriff der Ähnlichkeit im wesentlichen zahlentheoretisch gefaßt werden muß. Zerlegbarkeit in (z. T.) übereinstimmende Primfaktoren, d. h. gemeinsame Primteiler, spielt die größte Rolle. Daneben kommen noch als sehr wichtig reine Größenbeziehungen in Betracht; gleiche oder sehr stark abweichende Größenordnung der zu verbindenden Komplexteile, der charakteristische Wert ihrer Differenz und deren Teilbarkeitsverhältnisse kommen hier hauptsächlich in Frage.

Völlig fehlen, wenn wir von dem Komplex 10 im 1. Beispiel absehen, die rein äußerlichen Ähnlichkeitsbeziehungen. Daß sie in den drei ersten Komplexen aufzutreten scheinen (starke Betonung der 7), ist, wie man leicht sieht, durchaus sekundär, ungewollt und folgt aus den Eigenschaften des Materials. (So tritt z. B. der Umstand, daß im zweiten Komplex die Ziffer 7 zweimal hintereinander auftritt, völlig zurück. Auch die Verknüpfung der im Komplex 8 errechneten Differenz 77 mit jener 77 des Komplexes 2 fehlt.) Es widerspricht R.s Art, die äußerlichen Eigenschaften, die er im visuellen Bilde erfaßt, nun auch noch zum Träger irgendwelcher logischer Beziehungen zu machen. Und das ist verständlich. Einmal können derlei äußerliche zufällige Merkmale für einen Mathematiker überhaupt nur ein beschränktes Interesse haben, so daß sie nicht imstande sind, im Prozeß des Interessantmachens eine Rolle zu spielen. Zum anderen aber folgen sie ja selbst erst aus dem visuellen Bilde und würden, wenn dieses fehlt, kaum imstande sein, von sich aus das Bild zu reproduzieren. Je mehr die Hilfen von der Vorlage äußerlich unabhängig sind, umso deutlicher spricht sich in ihnen der Grad der Vergeistigung des Materials aus, umso geeigneter aber sind sie auch, jene Vorlage oder ihre Teile in den seltenen Bedarfsfällen zu rekonstruieren.

Dieser Ablehnung äußerlicher, in dem zufälligen Beieinander des Materials gegebener, Hilfen entspricht auch der entschiedene Verzicht auf Umgruppierungen. Sehr oft lassen sich ja bei Ziffern-

reihen durch Umstellung oder Vertauschung eines oder mehrerer Glieder interessante augenfällige Parallelismen herstellen. R., den ich mehrfach auf derartige Möglichkeiten aufmerksam machte (etwa beim Komplex 347743), begründete seinen Verzicht auf derartige Behelfsmittel damit, daß die Umstellung den Komplex zerreiße und infolgedessen das Lernen nur störe.

Schon diese kurzen Ausführungen zeigen, wie sehr R.s Ähnlichkeitsbegriff von dem der Nichtmathematiker abweicht. Dafür noch ein Beispiel: Es war zu lernen 641643. Jeder Nichtmathematiker würde in der auffälligen Ähnlichkeit der beiden Komplexteile einen interessanten Fall sehen und sich den Komplex als aus ähnlichen Teilen zusammengesetzt einprägen. Für R. bestand hier keinerlei Ähnlichkeit. Zwar sind beide Zahlen Primzahlen gleicher Größenordnung; aber die erste ist von der Form $4n+1$, während die zweite der Form $4n+3$ angehört. Der tiefgreifende Unterschied, der zwischen solchen Primzahlen besteht, und der u. a. in der nur für die erste Art geltenden eindeutigen Zerlegbarkeit in die Summe von zwei Quadraten zum Ausdruck kommt, läßt vielmehr den Charakter der Verschiedenheit so deutlich werden, daß R. geradezu von einem Kontrast spricht. Dieses Kontrasterlebnis spielt auch sonst als Hilfe eine gewisse Rolle, z. B. als Größenkontrast. So stehen z. B. im Komplex 137929 die beiden Teile im Größenkontrast zueinander.

Es darf nicht unerwähnt bleiben, daß diese Arten sowie vor allem diese Verwendung von Hilfen nicht als die nach Maßgabe des Materials einzig möglichen anzusehen sind. Zunächst nicht die Arten der Hilfen. G.-Hegge hat in seiner Untersuchung durch Gegenüberstellung von Dr. R. und Frl. Dr. Bergh den Nachweis erbracht, daß neben der logisch-mathematischen Behandlungsart R.s auch eine dramatisierend-personifizierende möglich ist. Bei Frl. B. erscheinen die Ziffern als Personen, die bestimmte Handlungen ausführen, durch die ihrer wechselnden Gruppierung ein anschauliches Korrelat gegeben wird. So teilt G.-Hegge (Z. für prakt. Psychol. III, 2, S. 39) nachstehendes Beispiel mit:

„Es ist folgender Teil einer Reihe einzuprägen: 5 6 3 6 0 5 7 3 8. — 5 ist diesmal ein Meilenstein, ziemlich hoch, 6

die schon erwähnte blonde Frau, die auf dem Meilenstein sitzt, 3 ist wie früher ihr Kind, das sie auf dem Arm hält, das gibt 563. Dann steht 6 auf, nimmt 0, eine Waschwanne, und trägt sie mit 5, die diesmal die früher erwähnte andre Frau ist, zusammen. Sie tragen die Wanne zwischen sich, das gibt 605. Wir haben es hier mit zwei Situationen zu tun, die beide ihren einfachen charakteristischen Sinn besitzen. Indem nun aber 6 das Kind 3 im Stich läßt, wird die folgende Situation vorbereitet: 3 geht zwischen zwei Schutzleuten 7 und 8, die das Kind gefunden haben und es nun an der Hand führen. Das gibt 738."

Gelegentlich werden auch die Ziffernbilder selbst zueinander in Beziehung gebracht, zu Figuren und Bildern gruppiert. Auch dafür ein Beispiel (a. a. O.):

„5", sagt Frl. Bergh z. B. einmal bei der Ziffernfolge 5 6 7 3 5 3 usw., „hängt in der Ziehschnur am Fenster — eine deutlich aus Papier ausgeschnittene Ziffer, — 6 ist in 5 hineingeklammert und ragt in horizontaler Lage nach der einen Seite heraus, 7 in derselben Weise nach der andern Seite. Nun kommt 3. Sie hängt nach unten in der 5, die darauffolgende 5 wieder in der 3, und die dann wieder folgende 3 wieder in der letzten 5 —, das paßt mir ausgezeichnet, das Gerippe des Kreuzes wird ja symmetrisch, es enthält ja abwechselnd 5 und 3." — Eine solche Verfahrensweise würde R. niemals als die der Zahl adäquate erscheinen und verstieße notwendig gegen sein Prinzip von der Reinheit der Methode. Er ist zu sehr Mathematiker, um mit Zahlen Geschichten zu erfinden.

Daneben aber scheint mir, als wenn bei Frl. B. auch die Verwendung der Hilfe eine andere wäre. Sie verknüpft die Ziffern in dramatisierten Geschichten und figürlichen Illustrationen, um die Reproduktion nachher an der Hand der so geknüpften Assoziationen zu vollziehen. Demgegenüber sehen wir bei R., daß er in der Regel auf Grund des A.-Bild-Gedächtnisses seiner Vorlage auffagt. Die in den Hilfen niedergelegten Assoziationen zieht er nur behelfsweise heran, nur dann, wenn seine durch räumliche Kontiguität verknüpften visuellen Ziffernbilder versagen.

Natürlich sind die Auffagezeiten von Frl. B. erheblich länger als die R.s, ein Umstand, der aus der verschiedenen Bedeutung der Hilfen bei beiden ohne weiteres erhellt*). So wird aber auch verständlich, warum Frl. B. zur Einprägung so viel mehr Zeit gebraucht als R. An das Material herangebrachte Hilfen von der Art der ihren stehen auch einem mit glänzender anschaulicher Kombination begabten Kopfe nicht so ohne weiteres zur Verfügung wie die immanenten Hilfen R.s. Erfindung der Hilfe, Prägung und Lokalisation des Bildes, das sie repräsentiert, sowie dessen Einprägung: das sind die drei Akte, in die sich bei Frl. B. der Assoziationsprozeß auflöst. Zwar wandert dabei der Sinn des Ganzen von der Ziffernfolge hinweg in die kausal verknüpfte Assoziationskette der Begleitbilder, in die pragmatischen Ketten, wie G.-Hegge sie genannt hat. In deren kausaler Verkettung aber liegt für sie die Grundlage der Ersparnis an Wiederholungen, die ihr für lange Reihen naturgemäß besonders zustatten kommt. Die Lernzeit wächst daher bei ihr ungefähr proportional der Reihenlänge. Bei R. erwächst die Hilfe aus dem Material selbst und steht damit unmittelbarer zur Verfügung. Einer besonderen Lokalisation der Hilfe bedarf es bei ihm nur in den Fällen, in denen die Hilfe nichtbenachbarte Komplexe umfaßt und verbindet. Aber auch dann führt sie nicht aus dem Gesamtbilde heraus. Eine eigentliche Einprägung der Hilfe erweist sich ebenfalls als unnötig, sie klingt bei der Wiederholung des Materials ohne weiteres mehr oder weniger deutlich mit an. Aber weil die Einprägung das Material an sich betrifft und nur durch Wiederholungen möglich ist, so wird verständlich, wie durch Verlängerung der Reihe auch die Anzahl der Wiederholungen gesteigert wird, zumal, wenn man sich die durch unsre früheren Ausführungen wahrscheinlich gemachten starken hemmenden Wirkungen der Reproduktionstendenzen vergegenwärtigt, so daß man bei R. (vgl S. 12) von einem angenäherten Anwachsen der Lernzeit mit dem Quadrat der Reihenlänge sprechen kann.

*) So benötigte Frl. B. zur Wiedergabe einer Reihe von 204 Ziffern nicht weniger als 9 Min. 16 Sek., während R. zur gleichen Aufgabe etwa 1 Min. gebraucht.

Sowohl bei R. wie bei Frl. B. steht die Hilfenbildung im Dienste der Erweckung und Steigerung des Interesses an einem ursprünglich spröden Material. Bei R. ist damit die Bedeutung der Lernhilfen im wesentlichen erschöpft, bei Frl. B. geht sie weiter. Die Lernhilfen werden zum Träger des gesamten Lern- und Auffageverfahrens. — Mir will scheinen, daß der tiefste Grund dieses Unterschiedes in R.s eidetischer Anlage und ihrem Gebrauch liegt. Von Eidetikern wissen wir, mit welcher hohen Präsenz, Dauerhaftigkeit und Genauigkeit sie ein auch kompliziertes Material in kürzester Zeit zu bewältigen verstehen [38]). Zwar vermag Frl. B., nach einer freundlichen mündlichen Mitteilung von Herrn Dr. G.-Hegge, ihre deutlichen, lebhaften und detaillierten Vorstellungsbilder anscheinend auch in A.-Bilder umzusetzen, sie in den Wahrnehmungsraum hineinzuverlegen und mit den Wahrnehmungsobjekten in identischen Sehakten zu erfassen. Aber für sie besitzen solche Bilder etwas Unheimliches, sie scheut sich vor ihnen und macht von der eidetischen Anlage infolgedessen im allgemeinen keinen Gebrauch. Den Grund dieser Tatsache darin sehen zu wollen, daß sie etwa dem tetanoiden Typ (W. Jaensch) angehöre, bei dem die A.-Bilder sehr leicht diesen angsterregenden Einfluß zeigen, hieße aber, einem Schema zuliebe Tatsachen fälschen. Viel näher scheint Frl. Bergh, deren A.-Bilder von hoher Flexibilität sind, dem basedowoiden Typ zu stehen. Offenbar ist ein anderer Grund für ihre Scheu vor A.-Bildern maßgebend. Frl. B. lebt, leidet und lacht mit den Gestalten ihrer Phantasie, sie sind nicht nur Produkte ihres Kopfes, sie sind auch Kinder ihres Herzens. Es würde nicht unverständlich sein, wenn sie fürchten sollte, diesen Gestalten, die ihr an und für sich schon sehr nahe stehen, nun auch noch den Charakter des Wahrnehmungsgemäßen zu geben und damit der Anteilnahme noch mehr zu verfallen. Bei R. fallen diese Gründe völlig weg. Nur im Intellekt verankerte Gefühle (vgl. Kap. 7) verbinden ihn mit seinen Zahlen und deren Beziehungen. Dazu kommt der Mangel an Perseverationen, der ihn befähigt, sie fast so schnell wieder zu verdrängen, wie er sie hervorgeholt hat. — Derart eindringlichen, gefühlsbetonten Erlebnissen, wie sie Frl. B. bei ihren Lern-

methoden hat, würde sich gewiß auch R. nicht so leicht und schnell entziehen können.

Was aber auch hier wieder seiner Arbeit ihren einheitlichen, um nicht zu sagen wissenschaftlich-methodischen Stempel aufdrückt, das ist die strenge Beobachtung der Forderung nach Reinheit der Methode, die ihn hindert, über den Rahmen des rein Mathematischen, des dem Material Immanenten, hinausgehend, seine Hilfen in anderen Gebieten und Beziehungen zu suchen, wobei nicht notwendig an phantastisch-dramatisierende Hilfen gedacht zu werden braucht.

Bisher ist durchweg von Lernhilfen die Rede gewesen; von R.s Rechenhilfen ist nur wenig zu sagen. Versteht man unter Rechenhilfen alle diejenigen Mittel und Methoden, die zu dem Zwecke, ein richtiges und schnelles Lösen der Aufgabe leichter zu erreichen, eingeführt werden, ohne daß sie durch die Natur der Aufgabe unbedingt gefordert sind, so kann man zweifeln, ob R. außer in den Fällen, in denen er sich seines Diagramms bedient, überhaupt beim Rechnen Hilfen anwendet. Sicher ist es nicht berechtigt, die von ihm verwandten abkürzenden Lösungsmethoden im psychologischen Sinne als Hilfen zu bezeichnen. Sie sind nichts Anderes als die für ihn adäquaten Methoden. Einem Anderen, der sich ihrer ausnahmsweise oder in bewußter Absicht, etwa auf Grund einer Anleitung zum Schnellrechnen, bedient, um andere, ihm und seiner geringeren Einsicht in die Beziehungen der Zahlen und Operationen mehr entsprechende, aber weniger zweckmäßige Methoden zu vermeiden, würde man sie dagegen sehr wohl als Hilfen anrechnen dürfen*). Für R. sind sie Teile des normalen Lösungsverfahrens, durch die jeweilige Aufgabe gefordert. Im Gegensatz zu den Lernhilfen haben

*) Man sieht, wie bei einer derartigen Begriffsbestimmung der Begriff der Hilfe einen stark subjektiven Einschlag erhält. Der Grad der Einsicht und der Vertrautheit mit mathematischen Tatsachen und Beziehungen läßt den einen diese, den andern jene Verfahrensweise als adäquat, als durch die Natur des Problems gefordert, ansehen. So kommt es, daß gerade ein Rechner vom Range R.s sich dauernd Erleichterungen zu schaffen versteht, die zwar von seinem Standpunkt aus nicht als Wirkungen von Hilfen gewertet werden

sie keine selbständige Bedeutung. Trotzdem sollen sie hier kurz gekennzeichnet werden. Über ihre Art, sowie über die Prinzipien, denen sie unterworfen sind, ist in Kapitel 3 schon berichtet worden. Desgleichen bietet Kapitel 5 einschlägiges Material.

Bezüglich ihrer phänomenologischen Gegebenheit ist zu bemerken, daß sie bei R. stets visuell und zwar vorstellungsmäßig erscheinen. In der Regel fehlt sogar jede sprachliche Formulierung. Nur ganz flüchtig tauchen die ihnen entsprechenden Ziffernbilder auf, so schnell, daß artikuliertes Sprechen sie gar nicht begleiten könnte. Auch hier ist das eine wieder unverkennbar: je geläufiger eine Hilfe ist, desto flüchtiger ist das Vorstellungsbild, das sie repräsentiert.

Ihrer Bedeutung nach lassen sich bei dem Mangel an festen Grenzen deutliche Gruppen nicht herausheben. Wohl aber glaubt R. versichern zu können, daß auch in der Schriftgröße der Ziffernbilder sich die Bedeutung der Hilfe recht deutlich spiegele. Je wichtiger eine Hilfe sei, desto größer seien die ihr entsprechenden Ziffernbilder. Das erscheint bei der auch im Detail auf Zweckmäßigkeit und Ökonomie (Kapitel 8) eingestellten Arbeitsart R.s nicht unglaubwürdig, zumal man wohl überzeugt sein darf, daß er imstande ist, die prinzipielle sowohl wie die okkasionelle (gelegentliche) Bedeutung einer Hilfe richtig zu würdigen*).

Für alle Lern- und Rechenhilfen R.s ist ein Selektionsgesichtspunkt unverkennbar. R. verwendet, sobald durch andere Gesichtspunkte (besondere Assoziationsmöglichkeiten usw.) dem nicht Grenzen gezogen werden, stets diejenigen Hilfen, die rein mathematisch von der größten Tragweite sind. Es ist es auch hier wieder das Streben nach Verzicht kleiner Mittelchen und Handgriffe,

---

können, die aber bei einem Durchschnittsrechner als inadäquat betrachtet werden müssen. Der tiefere Grund für diese Subjektivität liegt in der Tatsache, daß kaum ein Rechenverfahren als schlechthin normal und hilfenfrei bezeichnet werden kann, während auf dem Gebiete des Gedächtnisses die rein mechanische, aller bearbeitenden Prozesse entbehrende Einprägung als hilfenfreies Verfahren gelten kann.

*) Doch können bei derartigen Größenänderungen auch „affektive Umbildungen“ eine gewisse Rolle spielen, wie sie G. E. Müller bei seinen Vpn. häufig beobachtete.

das ihn leitet. Bedenkt man, wie sehr gerade in der Zahlentheorie allgemeine Tatsachen zwar leicht zu formulieren, aber in der Regel am schwierigsten zu beweisen sind, so sieht man, wie mit dem Streben nach Einfachheit sich ein gewisser Zug zum Klassischen verbindet. Wie eng mit dieser Feststellung die andere zusammenhängt, daß R. auch beim Ziffernlernen und Rechnen sich als Mathematiker bewährt, braucht wohl kaum betont zu werden.

Vielleicht erhalten gerade hierdurch seine Hilfen den Charakter des Natürlichen, der seinem Lern- und Rechenverfahren trotz der ungewöhnlichen Dimensionen, in denen es sich bewegt, den Charakter des Normalen aufdrückt und so G. E. Müllers eingangs erwähntes Wort immer aufs neue bestätigt.

Inwieweit die im folgenden Kapitel geschilderten psychischen Nebenerlebnisse als Hilfen wirken, wird dort von Fall zu Fall untersucht werden.

7. Psychische Nebenerlebnisse.

Als Nebenerlebnisse im strengen Sinne wird man ohne Zweifel die Synästhesien (Diagramme und Chromatismen) anzusehen geneigt sein. Doch haben schon die früheren Ausführungen den Nachweis erbracht, daß R.s Diagramm keineswegs, wie in vielen anderen Fällen, den Charakter einer zwangsläufig mitauftretenden Begleitvorstellung hat. Wir sahen ja, daß es nur bei gewissen Operationen Bedeutung gewann, sonst aber völlig fehlte. Es war nichts anderes als die Grundlage für anschaulich ausgeführte Operationen und trat somit in deren Mittelpunkt, so daß von jenem Auchvorhandensein, das mit dem Begriff des Nebenerlebnisses verbunden ist, nicht gut die Rede sein kann. Wir scheiden das Diagramm daher hier aus der Betrachtung aus, zumal es schon an passenderer Stelle gewürdigt worden ist.

Gefühlsmäßige Hervorhebung, Beliebtheit und Unbeliebtheit gewisser Zahlen, auch Personifikationen aller Art fallen völlig aus. Trotzdem erschließt eine genauere Untersuchung eine ziemliche Fülle von eigentlichen Nebenerlebnissen. Die ökonomische

Arbeitsart R.s macht von vornherein das Vorhandensein rein intellektueller Nebenerlebnisse unwahrscheinlich. Seine Nebenerlebnisse sind außerintellektueller Natur; trotzdem führen sie, was ja auch schon ihrem Begriff widersprechen würde, kein selbständiges Dasein; sie begleiten intellektuelle Vorgänge und werden von diesen ausgelöst.

Die wichtigste Rolle spielen zweifellos ästhetische Gefühle. Die elegante Operation ist stets von einem ästhetischen Lustgefühl begleitet. Im gleichen Sinne wirken bei der Bildung der Lernhilfen besonders mannigfache und interessante Beziehungen. Ästhetisch wirkt nach R.s Aussage auch jede geometrische Operation; daher wohl auch die Streckenrechnungen im Diagramm. Ein besonders intensives ästhetisches Lustgefühl löst der von R. als Verschärfung der Bezugszahl bezeichnete Annäherungsprozeß aus. Hier, wo ihm besonders deutlich werden muß, wie er durch geeignete Wahl einer handlichen und doch genügend genauen Bezugszahl mit geringer Mühe einen sehr guten Annäherungswert erreichen kann, mag dieses Gefühl wohl im wesentlichen ein Ausdruck des Kraftbewußtseins sein. Doch scheint in jenen approximativen Prozessen an und für sich schon für R. eine ästhetische Komponente verankert zu sein. So erscheint ihm auch die Bestimmung des Grenzwertes einer konvergenten Reihe mit einem ästhetischen Lustgefühl behaftet. Diese Operation, bei der jeder folgende Schritt dem Ziele näher kommt, bei der aber auch die kleiner werdenden Schritte immer mehr verfeinerte Methoden verlangen, scheint ihm einem Ausmessen mit einem Bandmaß vergleichbar, bei dem nacheinander Kilometer, Meter, Zentimeter, Millimeter usw. als Maße verwandt werden müssen. Da haben wir also wieder einen Rekurs in das Geometrische, das als Anschauliches ja von R. als Oase im Gewirre der Zahlen stets mit Freude begrüßt wird.

Damit soll aber keineswegs ausgesprochen werden, daß diejenigen Operationen an Zahlen, die ohne geometrische Anschauung vollzogen werden, nicht von einem Lustgefühl begleitet sein könnten. Aber während für R. das Geometrische an und für sich reizvoll und angenehm gefühlsbetont ist, scheinen ihm die an

unveranschaulichten Zahlen vorgenommenen Operationen an sich meist gleichgültig zu sein. Nur insoweit sie ihm neue Eigenschaften der Zahlen und neue Kombinationsmöglichkeiten erschließen, sind sie für ihn interessant und wertvoll. Nur insoweit steigern sie auch das Kraftgefühl, das er der Zahl gegenüber besitzt und entfalten so eine sekundäre Wirkung. Welche Belebung das Interesse durch diese Momente leichter freudiger Erregung erfährt, liegt auf der Hand. Die Rolle, die gerade dem ästhetischen Moment als methodisches Prinzip sowohl wie als dynamischer Faktor bei R.s Leistungen zukommt, wird nicht leicht überschätzt werden können.

Man wird, wie mir scheint, die vorstehende Bemerkung auch mit einem gewissen Recht verallgemeinern dürfen. Die Rolle, die der schöne Beweis im Entwicklungsgang der Mathematik spielt, ist zu bekannt. Wie oft ist gerade das Bedürfnis, einem bereis vorliegenden, aber von Schwerfälligkeit, sprunghaftem Fortschreiten, uneleganten Methoden und Hilfsmitteln noch nicht gereinigten Beweis ein einheitliches, geschlossen fortschreitendes, nicht auf Kniffe und zufällig eingeführte Behelfsglieder aufgebautes Gepräge zu geben, die Ursache jenes Bestrebens gewesen, ein altes Problem mit neuen Methoden zu lösen? Welche Bedeutung sich für den Aufbau der mathematischen Disziplinen aus dieser Tatsache ergibt, liegt klar auf der Hand.

Hier scheint mir Gelegenheit, einige allgemeinere Bemerkungen über das mathematisch Schöne einzuschieben, zumal R.s Arbeitsmodus auf dem Gebiete des Rechnens eine Parallelisierung mit den wissenschaftlichen Arbeitsweisen der Mathematiker wohl verträgt.

Als häßlich gilt im allgemeinen dem Mathematiker der allzulange, zu viele Zwischenglieder umfassende Beweis. Diesem Umstand trägt er Rechnung durch Auflösung des Beweises in eine Anzahl von Teilproblemen und Nebenproblemen, die dann in Teilsätzen und Hilfssätzen ihre besondere Erledigung erfahren. Damit wird für die ästhetische Wirkung mancherlei gewonnen. Notwendige Einschiebungen und Zwischenbetrachtungen heben sich nun als nicht mehr bloß geduldet, sondern als gewollt heraus. Es entsteht eine Anzahl von Zwischenstufen, in denen der logische Fortschritt

natürlichen Halt erhält und auf denen Zeit gewonnen wird, den Gang der Entwicklung, deren Resultate in jenen Teilsätzen formuliert sind, rückblickend zu überschauen. Damit gliedert sich die wenig durchsichtige Mannigfaltigkeit in ein sauber und klar abgeteiltes Ganze. Der lose gefügte Haufen ordnet sich zum kunstvoll gegliederten Bau; — aber dieser Bau darf, um schön zu wirken, nicht gekünstelt sein. Die Aufeinanderfolge der einzelnen Stufen muß die auf ein festes, klares Ziel gerichtete Absicht des Schöpfers und seine souveräne Beherrschung des Materials widerspiegeln. Darum ist angeheftetes Flick- und Stückwerk verhaßt und unschön. Aus diesem Grunde vermeidet der Mathematiker von Rang Anleihen aus anderen Gebieten, mögen sie ihm auch noch so bequem erscheinen, mögen sie auch immer welche Rolle bei der Konzeption gespielt haben. Deshalb vermeidet er auch alles brillierende Analogisieren. Vielmehr sieht er seine Hauptaufgabe in der Herausarbeitung scharfer, übersehbarer Linien. Darum trifft auch den Mathematiker nicht jener Vorwurf, der anderen Wissenschaften gegenüber oft nicht ohne Grund erhoben wird, der Vorwurf, eine Sache schwieriger erscheinen zu lassen als sie ist und mit der absichtlichen Erschwerung der Auffassung eine Wissenschaftlichkeit auch da vorzutäuschen, wo eine Plattheit oder eine Kleinigkeit zu sagen ist. Des Mathematikers höchste Kunst ist die möglichste Vereinfachung und Abkürzung eines logischen Beweisganges, sofern sie nicht die Klarheit und Evidenz beeinträchtigt. Damit erhält aber der schöne Beweis eine ungesuchte, natürliche Straffheit, die in ihrem sicheren Vorwärtsschreiten zugleich ein dynamisches Element von fortreißender Wirkung besitzt. Mit einer derartigen Behandlungsweise verträgt sich kein ruhiges, beschauliches Verweilen, aber auch kein überhastetes Springen. So gewinnt der schöne Beweis den Charakter der Stetigkeit, womit dieser so bedeutungsvolle mathematische Begriff in anderer Wendung von einer Eigenschaftsbezeichnung eines bestimmten mathematischen Materials zu einem Charakteristikum des gesamten Verfahrens wird.

Es ist klar, daß der mathematische Beweis nur in wenigen Fällen bei seinem Entstehen die Eigenschaften an sich trägt, die

ihm im Vorstehenden als Komponenten der Schönheit zugesprochen werden. Im einen Falle stecken seine Wurzeln in der analogisierenden Übertragung gewisser Tatsachen auf ein verwandtes Gebiet; im anderen besteht er in seiner ursprünglichen Form aus einem Nebeneinander geometrischer Anschauung und arithmetischer Deduktion, in einem dritten erwächst er aus dem so oft in der Geschichte der Wissenschaften als fruchtbar erwiesenen Beispieldenken — einem reinen Gedankenexperiment, das unter individuellen, oft vereinfachenden Bedingungen angestellt, erst noch der Untersuchung auf Verallgemeinerungsfähigkeit bedarf. Kein Wunder, daß die Arbeit gerade des schöpferischen Mathematikers sehr oft nicht in der Konzeption, sondern in der Durcharbeitung liegt, in jener Durcharbeitung, die das gewonnene Resultat dem ganzen Gerüst der in Betracht kommenden mathematischen Disziplin als ein in formaler Hinsicht homogenes Glied einzufügen gestattet. Mit dieser Bearbeitung aber streift der neue Satz in hohem Maße die Schlacken seiner besonderen, individuellen Herkunft ab. Er erhält allgemeine Gebrauchsfähigkeit. Nicht zum wenigsten aus dieser, das formale Element so stark betonenden, guten Tradition der Mathematik entstammt ihre festgefügte, organische Struktur, die jeden ihrer Jünger, ganz unabhängig von der Disziplin, die er bearbeitet, zum Mitarbeiter an einem einheitlichen Bau macht. So viel es auch Schulen in der Mathematik gibt, so oft sie sich auch da, wo sie verwandte Gebiete beschreiten, unterscheiden hinsichtlich der sachlichen Ziele und der verwendeten Methoden, so selten kann daher in der Mathematik von einem Gegensatz der Schulen gesprochen werden, der anderen Wissenschaften oft einen weit über die sachliche Verschiedenheit hinausgehenden Zug der Zerrissenheit gibt.

Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, daß jene Eigenschaft, die dem Uneingeweihten die Mathematik so fremd und unnahbar macht, die reichliche Verwendung von abkürzenden Zeichen (die wir im folgenden, abweichend von der mathematischen Terminologie, als Symbole bezeichnen wollen), zugleich eines der wesentlichsten Grundelemente ihrer Schönheit ist. Wer einmal den Versuch machen wollte, bei einer nicht anschaulich geometrischen,

mathematischen Beweisführung auf diese denk- und sprachökonomischen Hilfen zu verzichten, wäre gezwungen, Bücher zu schreiben, wo sonst Seiten ausreichen. Die notwendige Häufung der Einschränkungen und Bedingungssätze würde zudem den positiven Gehalt so sehr in den Hintergrund rücken, daß der unbefriedigende Eindruck, den jede zu enge Spezialisierung einer Aussage mit sich bringt, vorherrschend werden könnte. Denn alle diese Symbole sind wohl definierte Träger von Bedingungen, die den Umfang ihres Geltungsbereichs durchweg einschränken. Wollte man in jedem Falle alle diese Bedingungen sprachlich formulieren, so würde sowohl die Kürze und Straffheit wie auch der Charakter der Allgemeingültigkeit verloren gehen und daher mit dem Schönen auch das spezifisch Mathematische. Gerade in den Symbolen und ihrer Verwendung ruht in hohem Grade der Reiz der Mathematik*).

Man hat der modernen Mathematik als ein Wesensmerkmal zuerkannt, daß sie uns sowohl das unendlich Kleine wie das unendliche Große nahe zu bringen verstünde. Welche Quelle ästhetischen Genusses darin liegt, mit dem hohen Standpunkt des unendliche Weiten überschauenden, auf das Ganze gerichteten Blickes die ultramikroskopische Betrachtung des Kleinsten verbinden zu können, braucht nicht betont zu werden. Die Astronomie hat in ihren Objekten nur das eine, die moderne Atomphysik nur das andere, und doch rühren beide in ganz besonderer Weise an das geordnete Schönheit suchende Herz ihrer Jünger. Wievielmehr die Mathematik, die sich beider Standpunktsmöglichkeiten erfreut und darin eins ihrer wesentlichsten materialen, ästhetischen Elemente besitzt. Aber nur eins, ein zweites, das sie außerdem besitzt, kommt anscheinend nicht allen ihren Jüngern zum Bewußt-

*) Wenn man bedenkt, ein welch fruchtbares und allgemein verwendbares Symbol in der Funktion liegt, so wird verständlich, wie Felix Klein zu der Forderung kommen mußte, den Funktionsbegriff schon in der Schule einzuführen. Nirgends ruht in der Mathematik das Geometrisch-Anschauliche so unmittelbar bei dem Arithmetrisch-Abstrakten wie in denjenigen Verwendungsweisen der Funktion, die die Schule gestattet. Nirgends aber auch stehen Allgemeingültigkeit und besonderer Fall in so enger, stets realisierbarer Verwandtschaft.

sein. Die Mathematik, die mehr als jede andere Wissenschaft den Anspruch erhebt, eine Setzung des Menschengeistes zu sein, erlaubt zugleich mehr als jede andere Wissenschaft die Erprobung ihrer Resultate an der Erfahrung, am Beispiel im weitesten Sinne. Auch da, wo sie nicht im Dienste irgend einer anderen Wissenschaft steht und in der ihr eigenen Sprache der Symbole Abhängigkeiten und Quantitäten beschreibt, besteht die Möglichkeit, das Allgemeine im besonderen Falle zu realisieren und am Beispiel seine Geltung zu prüfen. Für viele ihrer Jünger ist diese immer wieder in wechselnden Formen vollziehbare Erprobung mathematischer Sätze und Folgerungen eine Quelle ästhetischen Genusses. In jedem Wiederfinden und Wiedererkennen des allgemeinen Gesetzes im Bilde des Besonderen liegt, psychologisch betrachtet, dieselbe freudegebende Kraft des Bestätigungsbewußtseins wie im Wiedererkennungsakt überhaupt.

Wir verglichen vorhin die Tätigkeit des Mathematikers der Arbeit des Baukünstlers. In der Tat könnte man das Bild, auch ohne es zu pressen, noch in mancher Hinsicht (Qualität und Bearbeitung sowie Verwendung des Materials, Beanspruchung der Dispositionsfähigkeit des Ausführenden usw.) ausdeuten. Wir wollen davon hier absehen und nur gewisse, naheliegende Beziehungen der mathematischen zur künstlerischen Tätigkeit überhaupt verfolgen. Wenn wir dabei auf allgemeinere Betrachtungen verzichten und nur die Beziehungen der Mathematik zur Musik berücksichtigen, so bestimmt uns dazu die Tatsache, daß gerade mathematische und musikalische Begabung sehr häufig zusammen angetroffen werden. Das mag seltsam erscheinen, wenn man bedenkt, daß die Mathematik wohl mehr als jede andere Wissenschaft an den reinen Intellekt und die Musik mehr als jede Kunst an das reine Gefühl appelliert. Es ist bekannt, daß man nicht selten ausübende Musiker unter den Mathematikern findet; hier könnte manch bekannter Name genannt werden. Noch größer scheint aber die Zahl der Freunde der Musik unter den Mathematikern zu sein, die Zahl derer, die ihr nicht nur Genuß und Ablenkung, sondern auch Befruchtung und Anregung verdanken. Die Erklärung, die ich für diese Tatsache hier zu geben versuche,

wird nicht jeden befriedigen und vielleicht auch nicht allen Fällen Genüge tun, zumal sie die in jedem Falle verschiedenen Komponenten der Erfahrung, (Erziehung und Gewohnheit) nicht berücksichtigen kann. Es scheint mir aber, als wenn jener im besten Sinne methodische, folgerichtige Aufbau, die forttreibende Kraft, die akzentuierte Gliederung des Ganzen bei einheitlichstem Gesamtcharakter, die unverkennbare Analogie, die im Wechsel von Melodie und Variation, von Satz und Beweis liegt, eine genügende Erklärung zu bieten imstande wären. Dagegen scheint es mir ebenso verfehlt, die Mathematik des Kontrapunktes wie die Beziehungen der Primzahlfolge zur musikalischen Oberton- und Intervalllehre[31]) hier heranzuziehen.

Die vorstehenden Ausführungen würden wenig am Platze sein, wenn sich nicht von ihnen aus neue Gesichtspunkte ergeben würden für die Behandlung unseres Hauptproblems. Unschwer lassen sich auch bei R. die Beziehungen seiner mathematischen Arbeitsweise zu den vorhin entwickelten allgemeinen Gesichtspunkten über das Verhältnis der Mathematik zur Kunst nachweisen. Seine Arbeitsweise beruht auf scharfer Disposition, folgerichtigem Aufbau und hat in ihrer Straffheit und Konzentration Wesenszüge der mathematischen Arbeit im höheren Sinne. Unverkennbar ist infolgedessen auch bei ihm die an jene Eigenschaften geknüpfte ästhetische Wirkung. Ja, man kann vielleicht sagen, daß diese Wirkung bei ihm kein Nebeneffekt ist, sondern daß er sie sucht, um sich ihrer zu bedienen als eines weiteren Mittels, sich die Zahl und die Operationen an ihr so interessant zu machen, wie er es für seine Höchstleistungen braucht.

Eine besondere Bedeutung haben für R. dann noch die Erlebnisse des Schwer und Leicht. Es braucht wohl nicht betont zu werden, daß für ihn die Grenze zwischen Schwer und Leicht an ganz anderer Stelle liegt, wie bei jedem seiner Zeitgenossen. Trotzdem gibt es natürlich auch für ihn schwere Aufgaben. Schwer erscheint ihm z. B. das Lernen einer langen Ziffernreihe, z. B. einer solchen von 300 und mehr Ziffern. Der Eindruck der Schwierigkeit ist dabei im allgemeinen nicht gleichmäßig über die Reihe verteilt, vielmehr steigert er sich von Anfang an bis

etwa zur Mitte der Reihe, um dann wieder abzunehmen, sobald R. die erste Hälfte der Reihe sicher oder einigermaßen sicher beherrscht. Schwer können ihm auch gewisse Aufgaben erscheinen, wenn die Anzahl der auszuführenden Operationen sehr groß ist und er infolgedessen nicht jederzeit die Möglichkeit hat, bei einem etwaigen Fehler aus der Fülle der Einzeloperationen den falsch gelösten Teil herauszufinden. Schwer erscheinen ihm Aufgaben auch dann, wenn das Zahlenmaterial infolge seiner Größe gar zu unhandlich ist. In der Regel aber verbindet R. mit den Aufgaben, die ihm das tägliche Leben und gelegentliche Vorträge bieten, den Eindruck des Leichten. Es ist bezeichnend für seine ganze Art, daß ihm weder das Bewußtsein des Schweren noch das Bewußtsein des Leichten als ein statischer Zustand, der sich über die ganze Operation ausbreitet, gegeben ist. Vielmehr sind Schwer und Leicht für ihn ausgesprochen kinematische Erlebnisse. Verbindet er mit dem Leicht die Vorstellung des flüchtig Darüberwegeilenkönnens, so hat das Schwer für ihn den Charakter einer Bewegung in einem widerstrebenden Mittel, etwa vergleichbar mit dem Schwimmen in einer zähen Flüssigkeit. Demzufolge bedeutet Schwer für ihn eine fortgesetzte, angestrengte Widerstandsüberwindung, eine Aufgabe, der er nur mit einer erheblichen potentiellen Energie ausgerüstet gewachsen zu sein glaubt. Infolgedessen tritt er an schwierige Aufgaben mit einer viel höheren Konzentration heran, und es ist daher wohl kein Zufall, daß er gerade bei schwierigen Aufgaben relativ wenig Fehler zeigt. Dagegen ist unverkennbar und bezüglich des Reihenlernens an früherer Stelle schon nachgewiesen, daß er leichten Aufgaben gegenüber gelegentlich nicht den Aufwand an Kraft aufbringt, den sie verdienen, sodaß die wenigen Fälle, in denen er zu falschen Resultaten gelangt, sich vorwiegend auf die leichten Aufgaben beziehen lassen.

Mit dem Bewußtsein des Schweren und Leichten gehen Hand in Hand die Gefühle der Sicherheit und der Unsicherheit. In der Regel wird natürlich das Schwere von einem Gefühl der Unsicherheit begleitet sein, das Leichte von einem Gefühl der Sicherheit. Daß das Gefühl der Unsicherheit auf die Sorgfalt und Genauigkeit, mit der R. lernt und Rechen-

operationen ausführt, im günstigen Sinne einwirkt, ist selbstverständlich und erscheint geeignet, die vorhin angegebene Tatsache zu erklären, daß er gerade bei schweren Aufgaben so selten zu falschen Resultaten gelangt. Daß aber andererseits das Gefühl der Unsicherheit auch imstande sein kann, die Lernzeiten im ungünstigen Sinne zu verschieben und auf den Ablauf der Rechenoperationen verlängernd einzuwirken, ist verständlich. Sehr oft schiebt R. bei Operationen, die von dem Gefühl der Unsicherheit begleitet sind, Stichproben ein. So stellt er an schwierigen Stellen der Zahlenreihe wiederholte Auffageversuche an, prüft die Festigkeit schwieriger Übergänge, so wiederholt er aber auch beim Rechnen gelegentlich Teilresultate, die ihm nicht genügend fixiert zu sein scheinen oder rechnet Zwischenoperationen nach, zu deren Ergebnissen er kein festes Vertrauen hat. Alle diese Maßnahmen, so wenig sie vom zeitökonomischen Gesichtspunkte aus begrüßenswert zu sein scheinen, tragen dazu bei, den höchsten Erfolg seiner Leistungen, deren Richtigkeit, zu sichern.

8. Zur Ökonomie der geistigen Arbeit.

Wer es unternimmt, abnorme psychische Leistungen zu erklären, wird sich immer dessen bewußt bleiben müssen, wie unvollkommen bei dem heutigen Stande der Psychologie sowie der Lehre von den psychophysischen Konstitutionen und den individuellen Wirkungsausmaßen psychischer Fähigkeiten jeder derartige Versuch ausfallen muß. Das darf nicht hindern, dort, wo eine Erklärung möglich erscheint, sie auch zu formulieren und dort, wo sie versagt, die Unzulänglichkeit der Wissenschaft zu bekennen, die uns heute noch nicht gestattet, die Schleier zu lüften, die über den Mysterien des Lebens, und des geistigen Lebens insbesondere, ausgebreitet sind. — Mit Sicherheit kann nur das ausgesprochen werden, daß manches, was heute noch der Erklärung widersteht, ihr zugänglich gemacht werden kann und wird, ebenso sicher aber auch das andere, daß manches, was zur Zeit erklärt oder erklärbar erscheint, noch Schwierigkeiten in sich birgt, deren Aufdeckung neue Probleme stellen wird. — Die Reihe der Entdeckungen im geistigen Leben ist noch nicht abgeschlossen.

So müssen wir es auch hier uns versagen, die dispositionellen Grundlagen von R.s Begabung zu „erklären". Wohl aber haben wir die Verpflichtung, das, was im Gesamtbild der Leistung vereinigt ist, so weit als möglich auf gewisse Grundlagen zurückzuführen, die teils den Charakter von Fähigkeiten, teils von Methoden haben. In welchem Umfange wir dabei von einer Erklärung sprechen dürfen, und inwieweit wir uns mit einer bloßen Beschreibung zu begnügen haben, ergibt sich von Fall zu Fall. War dieser vorwiegend analytischen Aufgabe der bisherige Teil der Untersuchung gewidmet, so ist es Aufgabe des vorliegenden Abschnittes, den Gebrauch, den R. von jenen Grundlagen macht, im Hinblick auf einen speziellen Effekt zu untersuchen.

Genau besehen bringt der Begriff der Ökonomie nur unvollständig zum Ausdruck, worum es sich hier handelt; er betont zu wenig den Erfolg und zu sehr die Ersparnis an aufgewandten Mitteln. Gerade auf geistigem Gebiet steht aber der Erfolg zu den aufgewandten geistigen Mitteln in einer gewissen direkten Abhängigkeit; das gilt besonders dann, wenn es sich um einen Erfolg handelt, bei dem ein Mehr oder Weniger, ein Besser oder Geringer möglich ist. Denn nicht immer ist der Erfolg so einfach und so vollständig fixiert, wie beim Lernen einer Reihe und beim Rechnen einer Aufgabe. In solchen Fällen, wie den hier erwähnten, genügt es, als ökonomisch diejenige Arbeitsweise zu bezeichnen, bei welcher der Erfolg durch ein Weniger an Arbeit erreicht wird, wobei von Arbeitsersparnis sowohl im Hinblick auf die benutzte Zeit wie auf den gesamten Kräfteaufwand zu sprechen wäre. Nun ist der Kraftaufwand ja zur Zeit noch nicht genügend der Messung zugänglich, weder geben die Methoden der Ermüdungsmessung ein zuverlässiges Maß, noch wird es genügen, die Anzahl der Wiederholungen als Maß zu verwenden. Gewiß hat bei Versuchen, bei denen Art und Zeit der Darbietung des Materials so genau reguliert werden kann wie bei Lernversuchen, etwa am Vorführungsapparat von Müller-Pilzecker oder Ranschburg, die Registrierung der Anzahl der Wiederholungen einen guten Sinn. Aber, abgesehen davon, daß derartige meßbare Verfahrungsweisen nicht bei allen geistigen Aufgaben

möglich sind, wird man nicht zu vergessen haben, daß eine kurze Untersuchung auch nur beschränkten Aufschluß gibt. Wer für kurze Zeit hervorragende Erfolge zu erzielen vermag (etwa mit geringen Wiederholungszahlen auskommt), um nachher für geistige Arbeit derselben oder einer anderen Art desto ungeeigneter zu sein, wird nicht als ökonomischer Arbeiter gelten dürfen. Ökonomie im höchsten und allgemeinsten Sinne verlangt demgemäß die Erhaltung der Arbeitsfähigkeit über lange Zeit.

Auch von R.s Leistungen bekommt man nur einen unvollkommenen Eindruck, wenn man dieser Unermüdbarkeit nicht gedenkt. In wie hohem Grade sie bei ihm bestand, hat schon G. E. Müller betont, der mit R. gelegentlich bis zu 8 Stunden täglich Gedächtnisversuche anstellte, ohne ein Nachlassen seiner Leistungsfähigkeit zu beobachten. Auch unsere Versuche, die durchweg des Abends nach mindestens 8—10stündiger angestrengter wissenschaftlicher Arbeit stattfanden, sind dafür ein Beleg. Auch körperliche Anstrengungen, z. B. den Versuchen unmittelbar vorausgegangene Fußmärsche bis zu 25 Kilometer im unebenen Gelände in durchschnittlich 5—6 Stunden, zeigten keinerlei Einfluß auf die Leistung. Die für die 204zifferige Reihe aufgestellte Rekordzeit wurde u. a. unter solchen Bedingungen erzielt. — Daß dann innerhalb der meist etwa zwei Stunden umfassenden abendlichen Versuche kein merkliches Nachlassen der Leistungsfähigkeit sowohl im Rechnen wie im Lernen beobachtet werden konnte, bedarf nach dem Angeführten wohl kaum einer Betonung. Wo Leistungsverschlechterungen innerhalb einer Sitzung einmal auftraten, ließen sie sich unschwer auf andere Ursachen, z. B. auf die Wirkung von Hemmungen, zurückführen.

In der Unermüdbarkeit drückt sich eine Eigentümlichkeit der neuropsychischen Konstitution R.s aus, für deren Ursachen wir auf Annahmen angewiesen sind. — Doch bleibt uns auch hier nicht alles unerklärbar. Richter hat mit Nachdruck gegen Kraepelin geltend gemacht, daß die bei monotoner geistiger Arbeit (etwa fortlaufenden Additionen) an dieser Arbeit gemessenen Ermüdungserscheinungen keinen einwandfreien Maßstab geben können,

da sie als monotone Tätigkeiten nicht an das Interesse appellieren. Jeder Lehrer wird die Beobachtung bestätigen, daß es, interessanten Stoff und ansprechende, lebendige Behandlung desselben vorausgesetzt, durchaus möglich ist, in der sechsten Vormittagsstunde kaum schlechtere Leistungen zu erzielen als in der ersten und zweiten Frühstunde. Gleiches gilt für Ende und Anfang der einzelnen Stunde. So viel darf wohl immerhin gesagt werden, daß, sobald wir den Grad der Ermüdung nach dem subjektiven Empfinden und der objektiven Leistungsabnahme bestimmen, das Interesse als ein mindestens im weiten Umfange der Ermüdung polarer Faktor angesehen werden muß*). Demnach müssen wir in dem Umstand, daß R. der Erweckung des Interesses an seiner Aufgabe eine so erhebliche Sorgfalt zuwendet, zugleich eine Miturſache für seine Unermüdbarkeit sehen. Wie sehr alternierende Beanspruchung der einzelnen psychischen Funktionen imstande ist, die Ermüdung zu vermeiden bezw. ihre Wirkungen im Einzelnen und Ganzen abzuschwächen, ist aus der individuellen Erfahrung sowohl wie als beliebter pädagogisch-didaktischer Kunstgriff zu gut bekannt, um hier besonders betont werden zu müssen. R. macht von dieser Erfahrung sehr häufig bewußten Gebrauch. Vermeidung einer Ermüdung seines visuellen Vorstellungsvermögens bezweckt er u. a., wenn er am Ende längerer Ziffernreihen vorwiegend akustisch einprägt und auffagt. Die gleiche Wirkung erreicht er nach eigener spontaner Versicherung durch den Wechsel zwischen Vorstellen und eidetischem Sehen. So schiebt sich beim Lernen von Ziffernkomplexen zwischen die anschauungsbildmäßige, probeweise Projektion der einzelnen Komplexe während des Lernaktes immer wieder die rein vorstellungsbildmäßige Vergegenwärtigung der Hilfen. So unterbricht er aber auch den Ablauf der, einen Rechenakt begleitenden und ihm zugrunde liegenden, Vorgänge immer wieder durch Fixierung gewisser Teilergebnisse im A.-Bilde. Ob dieser Wechsel die Erholung der jeweilig gerade nicht beanspruchten

*) Das schließt nicht aus, daß längeres interessiertes Arbeiten als Gesamteffekt eine stärkere Ermüdung im Gefolge haben kann als ebenso langes uninteressiertes Arbeiten.

Reproduktionsart fördern kann, ist ohne genauere, hier zu weitführende psychophysische Betrachtungen über das Zustandekommen der beiden Reproduktionsformen nicht genauer zu diskutieren[32]). Wohl aber ist mit Bestimmtheit anzunehmen, daß durch die Belebung, die der angedeutete Wechsel in den ganzen Arbeitsprozeß hineinbringt, eine Steigerung des Interesses hervorgerufen, also zum mindesten der subjektiven Ermüdung entgegengewirkt wird. Von diesem Gesichtspunkt aus gewinnt auch die Tendenz R.s, gewisse Operationen anschaulich (im Diagramm) durchzuführen, einen tieferen Sinn. Diese Maßnahme wirkt ebenso wie alle die anderen, deren Effekt für ihn ein ästhetischer ist, im Sinne einer Bekämpfung der subjektiven Ermüdung. — Hier wäre einzuwenden, daß die Tendenz zur Veranschaulichung in gewissen Fällen einen Zeitverlust mit sich bringen kann. Dessen ist sich R. sehr wohl bewußt und darum gibt er ihr nur in bestimmten, früher genauer angegebenen Fällen nach, in denen er diese ungünstige Nebenwirkung nicht zu befürchten braucht. Sein Ziel sind die optimalen Bedingungen: Er braucht die Veranschaulichung zur Belebung des Interesses und zur Steigerung der auf ästhetischen Gefühlen beruhenden Antriebe. Aber er gibt dieser Tendenz nur insoweit nach, als sie den Gesamterfolg nicht beeinträchtigt.

Als ökonomische Maßnahmen, bei denen der Einfluß auf die Ermüdung nicht ohne weiteres gegeben zu sein braucht, kommen noch eine Reihe anderer Verfahrensweisen in Betracht.

Die Bevorzugung der dreistelligen Zahl als Element seiner Operationen wirkt z. B. im genannten Sinne. Wir sahen ja früher, daß die dreistellige Zahl ihm zahlentheoretisch genügend interessant und doch auch den Dimensionen seiner Auffassungs- und Rechenfähigkeiten so adäquat ist, daß sie aus ökonomischen Gründen eine bevorzugte Stellung einnehmen muß. Wir sahen überdies bei der Analyse der methodischen Grundprinzipien, daß er sich bei Lernversuchen nicht dazu versteht, mit diesen Elementen Veränderungen (Umstellungen usw.) vorzunehmen, die geeignet wären, das visuelle Bild zu zerreißen. Gleiches gilt vom Sechserkomplex. Welche Erschwerung die Zerreißung des Sechserkomplexes bedeutet, beobachtet man z. B. bei Aufsageversuchen in

Vertikalen, Diagonalen und Spiralen, wie er sie bei Karree-Lernversuchen vornimmt. In allen derartigen Fällen müssen die Komplexe aufgelöst werden; das bedeutet eine Erschwerung, die sich in einer Verlängerung der Auffagezeit äußert. R. selbst erscheint die Zerreißung unnatürlich. Er beschreibt sie als eine mit Zwangskräften vorzunehmende Überwindung von Kohäsionskräften.

Mit voller Absicht erfolgt R. ökonomische Ziele, wenn er Teilergebnisse durch Projektion im A.-Bild fixiert, um sie nachher ohne Zeitverlust und Nachrechnen wieder gegenwärtig zu haben; aber auch dadurch, daß er diese Teilresultate so lange völlig verdrängt, bis er sie braucht (vgl. S. 26). Auch in der Bevorzugung der Multiplikation sahen wir ja eine im letzten Grund ökonomische Maßnahme. Gleiches gilt von seinem Bestreben, die Bezugszahl so zu wählen, daß er sowohl mit ihr leicht operieren wie auch eine so hohe Annäherung an das Resultat erreichen kann, als nötig ist, um die verbleibende geringe Korrektur während des Aussprechens des Resultates anbringen zu können. Auch darin, daß er die Hilfen, mindestens beim Auffagen, nur insoweit deutlich vergegenwärtigt, wie er sie zum richtigen Auffagen benötigt, offenbart sich seine ökonomische Art. Dasselbe gilt von seiner Tendenz, von den ihm zur Verfügung stehenden Hilfen nur diejenigen zu verwenden, die das beiden Elementen eines Komplexes Gemeinsame hervorheben (Unterordnung der Individualisierung unter die Assoziierung).

Schon dann, wenn man die Elemente seines Schaffens ansieht, wird man sich der planmäßigen ökonomischen Gestaltung seiner Arbeitsweise deutlich bewußt. Ich erinnere nur an die visuelle Repräsentation von Nullenreihen durch entsprechend lange und abgeteilte Horizontalstriche, an die Bemerkung R.s, daß er im visuellen Vorstellungsbilde desto kleinere, flüchtigere und mattere Ziffern sehe, je bekannter, kleiner und unbedeutender die mit ihnen auszuführende Rechnung sei, sowie an sein überaus einfaches, von jedem Ballast freies Diagramm.

Auch die früher entwickelten methodischen Grundprinzipien (Reinheit und Adäquatheit der Methode) entbehren nicht einer

ökonomischen Nebenwirkung. Indem R. bewußt auf Behelfsmethoden aller Art verzichtet, verringert er die Anzahl der ihm zur Verfügung stehenden Verfahrensweisen um ein Beträchtliches und verkürzt damit den Prozeß der Auswahl, dessen gelegentliche unökonomische Wirkungen wir beim Wettstreit der Methoden kennen lernten.

Hier verdient auch eine Bemerkung unterstrichen zu werden, die bereits von Scripture[*3]) gemacht wurde. Dieser weist darauf hin, wie unrationell die bei Ausführung von Rechenoperationen aller Art von fast allen Menschen gehandhabte sprachliche (ob innerliche oder tatsächliche) Formulierung ist. Genau so gut, wie ich die mir geschrieben vorgelegte Aufgabe 6×6 dadurch löse, daß ich sie laut oder leise lesend ausspreche und dann durch die Kopula „ist" mit der ebenfalls sprachlich innervierten oder gar ausgesprochenen Lösung 36 verbinde, genau so gut kann ich auch mit dem visuellen Schriftbild, das ich — auch ohne es innerlich oder äußerlich zu sprechen — aufzufassen vermag, das Bild der Lösung unmittelbar assoziieren. Wer einmal geübte Rechner fortlaufende Additionen ausführen sieht, wird sich darüber klar, daß sie die sprachliche Formulierung auf ein Minimum zu reduzieren bestrebt sind. Sie addieren z. B. die Reihe $5 + 7 + 3 + 6 + 2$, indem sie entweder leise aussprechen 5, 12, 15, 21, 23, also nur die Lösungen angeben oder gar auch hier wieder durch Zusammenfassen geeigneter Glieder Zeit gewinnen, etwa 5, 15, 23. Schon allein durch den Verzicht auf innerviertes oder tatsächliches sprachliches Berücksichtigen der $+$, $-$, $\times$, : und $=$ gewinnt man erhebliche Zeit, wie ein Versuch leicht bestätigt. Welche Erfolge sich durch systematische Übung solcher vereinfachter Operationen in der Schule erreichen lassen, hatte der Verf. vielfach zu beobachten Gelegenheit. Im letzten Grunde ist ja das übliche Verfahren nichts anderes als ein sklavisches Festhalten an einem Schema, das auf einer niederen Stufe nötig und zweckmäßig ist, später aber, ohne Beeinträchtigung des Erfolges und ohne dem Vorwurf mechanisierender Sinnlosigkeit zu verfallen, durch das abgekürzte Verfahren ersetzt werden kann. Wer sich einmal selbst beim Rechnen beobachtet, macht leicht die

Feststellung, daß viele Hemmungen nicht aus dem eigentlichen Rechenakt, sondern aus dem Nachhinken, Versagen oder gar der falschen sprachlichen Innervation der Aufgabe und ihrer Lösung entstehen. – Daß R. im weitesten Umfange unserer Forderung genügt, braucht nicht erwähnt zu werden. Wollte er die Prozesse, die er ausführt, sprachlich formulieren, wollte er nur gar bei komplizierten Aufgaben die oft vielstelligen Zwischenresultate aussprechen, so wären Lösungszeiten wie die festgestellten einfach unmöglich.

Wohl kann man aber beim Lernen von Ziffernreihen beobachten, daß R. die einzelnen Ziffern und nur diese leise ausspricht. Das hat einen guten Sinn, weil er so auch das akustisch-motorische Gedächtnis mit heranzieht. Gleichzeitig erreicht er aber dabei die Einstellung auf einen gewissen Rhythmus, dem er nach eigener Angabe auch bei der Wiedergabe der Reihe zu folgen bestrebt ist.

Über allen den genannten ökonomischen Maßnahmen aber schwebt seine Dispositionsgabe. Er teilt seine Reihen zweckmäßig ein, verbindet Ganzlern- und Teillernmethode in sinngemäßer Weise, übt Schwieriges sorgfältig und länger als Leichtes und verteilt so, sowohl beim Lernen wie auch beim Rechnen, die psychische Energie in zweckmäßigster Weise über die ganze jeweilig vorliegende Arbeit. Auch durch diese Heraushebung gewisser Teile erfährt das Material eine Differenzierung, durch die es für R. an Formenreichtum und daher an Interessantheit gewinnt.

Hier taucht die Frage auf, in welchem Umfange die von R. angewandten, auf Ökonomie der geistigen Arbeit abzielenden Methoden auch von anderen, von der Natur weniger begünstigten, Individuen mit Erfolg verwendet werden können. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß der allgemeinen Übertragbarkeit der Verfahrensweisen R.s individuelle Grenzen gezogen sind. Nur verhältnismäßig wenige Erwachsene verfügen über subjektive Anschauungsbilder (vgl. Kroh, a. a. O., S. 47) und damit über die verläßlichste und leistungsfähigste Form des visuellen Vorstellens. Nur selten wird man auch dem Grade der Unermüdbarkeit und der erstaunlichen Konzentrationsfähigkeit begegnen, über die R.

verfügt. Nicht anders ist es mit dem mathematischen Rüstzeug, das ihm zu Gebote steht.

Schon darum kann man dem Versuch einer Übernahme seiner Methoden nicht ohne weiteres das Wort reden, so anregend und fördernd ein derartiges Unternehmen im einzelnen Falle auch ausfallen mag. Seine Methoden sind seine eigene Schöpfung und völlig seiner besonderen Leistungsfähigkeit sowie dem wechselnden Material angepaßt. Nur aus dieser Tatsache wurde uns die vollkommene Resonanz verständlich, die bei R. für Material und Methode besteht. Nur dieser Umstand kann es auch begreiflich machen, daß seine Arbeit wie jede im besten Sinne natürliche Leistung auf ihn so wenig ermüdend wirkt. Was daher als allgemeinere Folgerung für die Ökonomie der geistigen Arbeit aus den Leistungen R.s zu entnehmen ist, ist weniger seine besondere Methode, sondern vielmehr die Forderung, *Material und Methode sowie die eigenen Fähigkeiten und Interessen möglichst aufeinander abzustimmen*. Ein solches Resultat wirft allerdings einen starken Schatten auf alle die Methoden, die sonst von Gedächtniskünstlern usw. als die in jedem Falle besten gepriesen werden. Gewiß wird es möglich sein, durch Übernahme anderer Methoden in beschränktem Umfange bei jedem Individuum *Leistungssteigerungen* hervorzurufen, aber *Höchstleistungen* — und sie brauchen noch nicht einmal von der Größenordnung der R.schen zu sein — werden immer nur dann möglich, wenn das Individuum auf Grund intimer Kenntnis seiner eigenen psychischen Beschaffenheit und Leistungsfähigkeit unter vollster Berücksichtigung seiner besonderen Interessenrichtung sich seine eigene Methode formt und diese so ausbaut, daß sie den wechselnden Ansprüchen, die von dem verschiedensten Material aus gestellt werden, vollkommen angepaßt werden kann. Diese Forderung enthält allerdings Voraussetzungen, die nicht in jedem Falle erfüllbar zu sein scheinen. Wie oft befinden wir uns über unsere Leistungsfähigkeit und die Richtung und Tiefe unserer Interessen im unklaren! Und doch verfügt jeder über sichere Anhaltspunkte zur Beurteilung dieser Faktoren. Immer wieder wird uns bestätigt, daß das Gedächtnis nur für gewisse Dinge minder-

wertig sei, daß Wissensstoffe anderer Art gut behalten und verarbeitet werden. Gerade in derartigen Beobachtungen liegen nun aber wichtige Anhaltspunkte vor für die Beurteilung der eigentlichen Begabung. Wir brauchen uns oft nur darüber klar zu werden, wie wir auf den Gebieten arbeiten, in denen unsre Arbeit von Erfolg begleitet ist. Eine Analyse der auf diesen Gebieten verwandten Methoden und die Herausstellung der Faktoren, von denen unser Interesse abhängig ist, geben uns die Elemente an die Hand, aus denen aufbauend wir dann Möglichkeiten gewinnen für die Aufstellung von Methoden, die uns den erwünschten Erfolg auch auf anderen Gebieten garantieren.

Daraus geht schon unmittelbar hervor, wie wenig dem normalen Individuum durch bestimmte Gedächtnismethoden, wie sie durch Gedächtniskünstler vorgeschlagen werden, genützt wird. Wir stoßen dabei z. B. auf „Systeme", die von der Voraussetzung ausgehen, daß man Zahlen am besten dadurch einprägt, daß man sie mit geeigneten Wörtern gesetzmäßig verbindet und diese Wörter einprägt, etwa durch logische Verknüpfungen. Sehr oft liegen aber die Verhältnisse völlig umgekehrt. Es kommt vielleicht ebenso häufig vor, daß Zahlen besser als Worte gemerkt werden; in welchen Fällen es viel zweckdienlicher wäre, ein System aufzustellen, mit dessen Hilfe Wörter in Zahlen übertragen werden können. Alle „Systeme" dieser Art sind einseitig und darum in ihrer Anwendung beschränkt. Darum ziehen auch nur wenige Individuen aus ihrer systematischen Verwendung größeren Nutzen; den meisten bieten sie nichts, sie werden höchstens durch den Mißerfolg, den sie auch hier erleben, zur Entmutigung geführt und in der Überzeugung, daß sie schlechte Anlagen besitzen, zu ihrem eigenen Schaden bestärkt.

Aus dem Dargelegten geht auch hervor, wie sich Verf. zu der Frage stellt, ob es „Spezialgedächtnisse" gibt, d. h. eine von Hause aus bestehende Fähigkeit, Material dieser oder jener Art besonders leicht und zuverlässig einzuprägen. Ein Vorrang einzelner Gedächtnisinhalte je nach dem Sinnesorgan, durch das die Aufnahme der Inhalte erfolgt, scheint zu bestehen. Die starken Unterschiede in der Leistungsfähigkeit des Gedächtnisses,

die wir bei ausgeprägten Vertretern der einzelnen sensorischen Gedächtnistypen (visuell, akustisch, akustisch-motorisch) auch dann finden, wenn gleiches Material, etwa sinnlose Silben, optisch oder hörend oder laut lesend aufgenommen wird, deuten auf Differenzen der Leistungsfähigkeit hin, die vielleicht ebensowohl auf angeborene Dispositionen wie auch auf Übung und Gewöhnung zurückgeführt werden können. Aber schon in den nicht seltenen Fällen, in denen der Gedächtnistyp je nach der Art des Lernmaterials schwankt, wo etwa sinnlose Silben besser visuell, Ziffernreihen dagegen besser akustisch-motorisch eingeprägt werden, wird man zum mindesten auf die Annahme angeborener Differenzen verzichten müssen. Erst recht gilt das aber für die ausgesprochenen „Spezialgedächtnisse". Mit ebenso viel Recht oder Unrecht, wie man aus Sonderleistungen auf dem Gebiete des Zahlenlernens eine angeborene Sonderstellung der Gedächtnisfunktion für Zahlen folgert, müßte man auch in den nicht seltenen Fällen, in denen das Gedächtnis eine erhöhte Leistungsfähigkeit für Hausnummern, Geburtstage, Telephonnummern u. dgl. zeigt, von entsprechenden angeborenen Spezialgedächtnissen reden. Derartige Annahmen aber wären kaum mit irgend einer psychophysischen Gedächtnistheorie in Einklang zu bringen. Ehe man aber dazu übergeht, den Boden der durch ein umfangreiches pathologisches Material gestützten psychophysischen Gedächtnistheorien zu Gunsten einer rein psychistisch gedachten Theorie zu verlassen, wird man an die sekundäre Wirkung psychischer Faktoren (Interesse, ausgebautes System von Gedächtnishilfen, entwickeltere Fähigkeit zu fester und eindeutiger Verknüpfung) zu denken haben. Gerade das Beispiel R.s legt diese Annahme nahe, wie aus dem folgenden deutlicher hervorgeht.

9. Gesamtbild Rückles.[84])

Hier erscheint Gelegenheit, der Vielseitigkeit der Interessen, des Umfanges und der Präsenz von R.s Wissen allgemeiner zu gedenken.

Zu leicht verbindet sich mit der Vorstellung von einem „Zahlenspezialisten“ das Bild hochgradigster Einseitigkeit. Zu stark ist auch in einigen der in Abhandlungen, Lehrbüchern usw. über R. gemachten Ausführungen diese besondere Seite seiner Begabung in den Vordergrund gerückt, teilweise sogar noch durch Bezeichnungen wie Zahlenkünstler, Rechenkünstler und Gedächtniskünstler unterstrichen worden. So sehr derartige Bezeichnungen an und für sich von jedem Beigeschmack frei sein könnten, so sehr verbindet sich doch mit ihnen der Eindruck einer gewissen Inferiorität. Demgegenüber zeigten unsere bisherigen Ausführungen, in welch hohem Maße R.s Lern- und Rechenleistungen auf überlegener Einsicht in die Natur der Zahlen und auf Verfahrensweisen beruhen, denen man scharfsinnige Begründung und methodisch-wissenschaftliche Durchführung nicht absprechen kann. Darüber hinaus soll hier aber noch mit einigen Worten der Meinung, in R. einen einseitigen, wenn auch vielleicht den größten Zahlenspezialisten vor sich zu haben, entgegengetreten werden.

Gewiß sind R.s Leistungen auf dem Gebiete der Zahlen unerreicht, auch innerhalb seiner Gesamtleistungen nehmen sie eine ausgezeichnete Stellung ein. Das ist aber nur die Folge seiner durch Übung und Interesse erreichten intimen Kenntnis der Zahl und ihrer Eigenschaften. Daß dieses Interesse mit Manie nichts zu tun hat, beweist der Umstand, daß R.s Methoden gerade darauf hinausgehen, die Zahl und die in ihr liegenden Schwierigkeiten zu überwinden, nicht etwa sie zu kultivieren. Auch der Einfluß der Übung ist nicht von der Art wie etwa bei Inaudi, der täglich rechnen mußte, um die Höhe seiner Leistungen zu halten. R. hat oft monate-, ja jahrelang kaum eine besondere Gelegenheit oder Veranlassung, sich mit Zahlen anders oder mehr zu beschäftigen, als jeder andere Berufsmathematiker. Trotzdem zeigt er auch ohne jede Übung eine Leistungshöhe, die gerade dadurch überrascht, daß sie, wie unsere Versuche zeigten, schon nach wenigen Versuchen über die früheren Rekordleistungen hinauszuwachsen vermag. Diese geringe Abhängigkeit von der Übung zeigt deutlich, wie wenig im eigentlichen Sinne Gelerntes in R.s Zahlenleistungen steckt. Mag er infolge seines guten Gedächtnisses auch

für manche Zahl und manche Zahlenbeziehung bei sich sichere, leicht ansprechbare Residuen vorfinden: niemals ist sein Gedächtnis allein imstande, seine Leistungen zu erklären. Eine höhere Bedeutung als dem Gedächtnis möchte ich seiner Methode zuschreiben, und diese ist, weil selbst von ihm geschaffen und mit allen Feinheiten ausgerüstet, sein eigenstes Werk und — wenn wir hier von seiner wissenschaftlichen Bildung und der auch andern Gebieten gegenüber zweifellos bestehenden wissenschaftlichen Einstellung absehen — ein schlüssiger Beweis für seine Intelligenz.

Es liegt nahe, von diesen Erfahrungen aus das Problem der Mitübung formaler Fähigkeiten überhaupt einer näheren Betrachtung zu unterziehen. Wahrscheinlich wird es weniger auf die materiale Verwandtschaft der geübten mit den eventuell mitgeübten Stoffen als auf die methodische und formale Übereinstimmung in der psychischen Gesamthaltung zu jenen Stoffen ankommen. — Jedenfalls aber ist in dieser Angelegenheit noch nicht das letzte Wort gesprochen.

Die Schnelligkeit, mit der R. seine Dispositionen trifft und unter den ihm zur Verfügung stehenden Verfahrensweisen die geeignetsten aussucht und konsequent anwendet, die hochgradige Konzentration, die er überall zeigt, wo er geistig arbeitet, sind das Ergebnis vorzüglicher Anlagen und fortgesetzter geistiger Schulung. Erst durch sie finden jene Methoden die erfolgreiche Anwendung. In diesen Tatsachen liegt aber auch der tiefste Grund dafür, daß R. keiner eigentlichen Übung bedarf, um auch auf dem Gebiete der Lern- und Rechenleistungen seine einzigartige Leistungshöhe zu erhalten, ja zu steigern. Diese Leistungen haben dieselben formalen Grundlagen wie seine spezifisch wissenschaftliche Tätigkeit, sodaß es nicht unverständlich ist, daß gerade in Perioden angestrengter wissenschaftlicher Arbeit seine Leistungen auf jenen Spezialgebieten ohne besondere Übung zu wachsen scheinen. Nur diese Tatsache macht den trotz fehlender Übung auch heute noch bei R. zu beobachtenden Leistungsfortschritt auf dem Gebiete des Zahlenrechnens und Ziffernlernens verständlich.

Anmerkungen.

[1]) G. E. Müller, Zur Analyse der Gedächtnistätigkeit und des Vorstellungsverlaufes, Erg.-Bd. 5, 8 und 9 der Zeitschr. für Psychologie. (Bd. 5 im folgenden zitiert als Müller I, 1).

[2]) Einige Feststellungen über R. als Kopfrechner macht Müller (I, 1, S. 224—226), sowie derſ., Z. f. Psychol., Bd 67, S 209—213 (Müller II).

[3]) Zerah Colburn (1804—1840); der Sohn eines Farmers aus Vermont, verfaßte eine Selbstbiographie, in der er, nach Scripture (vgl. Anm. 5) seine Fähigkeiten auf dem Gebiete des Kopfrechnens sowie des Gedächtnisses nicht ohne Übertreibung darstellt. Er versuchte sich mit geringem Erfolge in öffentlichen Schaustellungen, war dann Methodistenprediger und starb als Sprachlehrer.

[4]) Henri Mondeux (1826—62) fiel in seiner Jugend, die er als Schafhirte verbrachte, durch große Gewandtheit im Kopfrechnen auf. Mit 14 Jahren wurde er der Akademie der Wissenschaften zu Paris vorgestellt, die ihn durch eine Kommission, der u a. Cauchy und Arago angehörten, genauer untersuchen ließ. (Deren Bericht, Comptes rendues, 1840, XI.)

[5]) E. W. Scripture, Arithmetical Prodigies (American Journal of Psychology IV, p. 1 ff.) gibt eine historische Zusammenstellung der bekannten Fälle von ungewöhnlichen Leistungen auf dem Gebiete der Zahlen.

[6]) Fr. D. Mitchell, Mathematical Prodigies (American Journal of Psychology, XVIII, p. 61 ff.) behandelt das vorliegende Material übersichtlich, beschreibt seinen eigenen Fall und sucht eine neue Theorie des Kopfrechnens zu geben.

[7]) A. Binet, Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échecs, Paris 1894.

[8]) Jacques Inaudi, ein 1867 geborener Piemontese, wurde 1892 durch den bekannten Mathematiker Darboux der Akademie der Wissenschaften vorgestellt, die ihn durch eine Kommission (Darboux, Poincaré, Tisserand und Charcot) untersuchen ließ. In seiner Jugend Schafhirte, zeichnete er sich schon mit seinem 6. Lebensjahr durch große Leistungen im Kopfrechnen aus. Binet (a. a O.) hebt sein gutes Zahlengedächtnis hervor. R. übertrifft ihn sowohl hinsichtlich des Zahlenlernens wie des Kopfrechnens bedeutend.

[9]) Gleiches gilt für P. Diamandi, einen 1868 geborenen Griechen, der ebenfalls von Binet eingehend untersucht wurde. Seine Gedächtnisleistungen bleiben auch hinter denen Inaudis wesentlich zurück — Er lernte rein visuell, während Inaudi dem akustisch-motorischen Typ angehörte.

[10]) G. E. Müller I, 1, §§ 22—33; Müller II.

[11]) F. E. O. Schultze, Über Lernzeiten bei größeren Komplexen, Z. f. Psychol., Bd. 71, S. 138—166. — Schon vor Schultze hat Foucault (L'année psychologique, 1913, S. 218 ff.) allgemein ein Anwachsen der Lernzeit mit dem Quadrat der Reihenlänge feststellen zu können geglaubt. Man würde also korrekter von der „Foucault'schen Gesetzmäßigkeit" sprechen (Vgl. auch J. Fröbes, Lehrbuch der experiment. Psychologie, Bd. 1, S. 516, 1917).

[12]) F. Kemsies u. A. Grünspan, Über Rechenkünstler, Z. f. päd. Psychol., Bd. 5, S. 193—207.

[13]) Thorleif G. Hegge, 1) Bidrag til Analysen av Hukommelsen I. Kristiana 1918. 2) De store Hukommelseskunstnere; „Samtiden", 1919. (Über die beiden Arbeiten sind Eigenberichte des Verfassers in Z. f. Psych. 84, S. 349—354 erschienen). 3) Zur Analyse des Lernens mit sinnvoller Verknüpfung. (Beih. 29 der Zeitschr. für angew. Psychologie).

[14]) Man unterscheidet das Ganzlernverfahren von dem Teillernverfahren. Versuche von Lottie Steffens (Z. f. Psychol., 22, S. 321) bewiesen die Überlegenheit des Ganzlernverfahrens. Meumann schlug statt dessen als besonders ökonomisch ein gemischtes Verfahren vor; dieses unterscheidet sich von dem Ganzlernverfahren nur dadurch, daß besonders schwierige Teile des Lernmaterials (Übergänge u. dgl.) isoliert eingeprägt werden.

[15]) H. Ebbinghaus, Über das Gedächtnis, Lpz. 1885, S. 64.

[16]) F. Galton, Inquiry into human faculty, London 1883. Number forms.

[17]) E. Bleuler, Zur Theorie der Sekundärempfindungen, Z. f. Psychol. Bd. 65, S. 1 ff.

[18]) R. Flournoy, Des phénomènes de synopsie, Genf, 1893.

[19]) G. E. Müller, Erg.-Bd. 8 der Zeitschr. für Psychol., §§ 104—114.

[20]) R. Hennig, Entstehung und Bedeutung der Synopsien, Z. f. Psychol. 10, 1896.

[21]) D. E. Phillips, Genesis of number forms, Americ. Journal of psychology 8, p. 506 ff.

[22]) V. Urbantschitsch, Über subjektive optische Anschauungsbilder, Leipzig und Wien, 1907.

[23]) E. R. Jaensch, Über die Vorstellungswelt der Jugendlichen und den Aufbau des intellektuellen Lebens.

Derselbe, Über den Aufbau der Wahrnehmungswelt und ihre Struktur im Jugendalter (2 Serien von Abhandlungen, die bei J. A. Barth, Leipzig, erscheinen).

O. Kroh, Subjektive Anschauungsbilder bei Jugendlichen, Göttingen, 1922.

[24]) Von ihren physikalischen und mathematischen Studien aus waren die (jüngeren) Pythagoräer zu einer unfruchtbaren Zahlensymbolik gelangt. So war ihnen die 4 das Sinnbild der Gerechtigkeit, die 5 das Symbol der Hochzeit usf.

[25]) F. Klein. Jahresbericht der Mathem.-Vereinigg., Bd. 4, S. 77: „Die Weiterbildung der reinen Mathematik erscheint dem Fernerstehenden vielleicht als etwas ganz Willkürliches, weil die Konzentration auf einen von Haus aus gegebenen Gegenstand wegfällt. Und dennoch gibt es einen Regulator, der in beschränkterem Sinne allen anderen Disziplinen wohlbekannt ist — die historische Kontinuität: Die reine Mathematik wächst, indem man alte Probleme mit neuen Methoden durchdenkt. In dem Maße, wie wir die früheren Aufgaben besser verstehen, bieten sich neue von selbst."

[26]) Nach den genaueren Untersuchungen von G. E. Müller (II) ist R.s topisches Gedächtnis nicht als übernormal anzusprechen

[27]) Joh. Dahse, über den wir durch Angaben von Gauß und von Schumacher unterrichtet sind, besaß anscheinend eine hochentwickelte Rechenfähigkeit sowie ein ausgezeichnetes Zahlengedächtnis. Gauß berichtet, daß D. zwei hundertstellige Zahlen in $8^3/_4$ Stunden im Kopf miteinander multiplizierte. Dahse stellte seine Fähigkeit ganz in den Dienst der Wissenschaft, indem er umfangreiche und genaue Berechnungen natürlicher Logarithmen sowie Primfaktorenzerlegungen ausführte

[28]) Hervorragende Mathematiker mit ungewöhnlichem Zahlengedächtnis und großer Rechenfertigkeit waren z. B. Gauß, Lejeune-Dirichlet und Ampère.

[29]) G. E. Müller definiert (Erg.-Bd. 8 der Z. f. Psychol., S. 1): „Man pflegt von einer Benutzung oder Mitwirkung von Hilfen beim Lernen zu reden, wenn durch Beachtung auffälliger Eigenschaften einzelner Reihenbestandteile (wofür man allgemeiner „Lernmaterial" einsetzen könnte — der Verf) oder besonderer gegenseitiger Beziehungen einzelner Reihenbestandteile oder durch gewisse an Reihenbestandteile sich anschließende Nebenvorstellungen eine Förderung des Lernens bewirkt oder angestrebt wird oder das Lernen durch einzelne Assoziationen erleichtert wird, die schon bei früheren Gelegenheiten gestiftet worden sind.

[30]) E. R. Jaensch, Sitzungsberichte der Ges. zur Beförderung der ges. Naturwissenschaften, 1917.

[31]) Vgl. W. Preyer, Über den Ursprung des Zahlbegriffs aus dem Tonsinn und über das Wesen der Primzahlen. Beitr zur Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane, Festschr. zum 70. Geburtstag von H. v Helmholtz, Berlin 1891.

[32]) Vgl. darüber O. Kroh, Subjektive Anschauungsbilder bei Jugendlichen, S. 103 ff.

[33]) Vgl. Anmerk. 5.

[34]) Gottfried Rückle wurde im Jahre 1879 zu Frankfurt a. M. geboren. Er zeichnete sich schon als Schüler (Wöhlerschule) vielfältig aus und bestand 17 jährig die Reifeprüfung als Primus. Schon mit 21 Jahren erwarb er auf Grund einer mathematischen Dissertation bei D. Hilbert in Göttingen die Doktorwürde.

Soeben erschienen:

Recht und Unrecht der Anthroposophie.
Zwei Vorträge von Pd. Dr. Lic. **Joh. Wilh. Schmidt-Japing.**
42 S. 8°. 1922. Grundzahl*) 1,20

Hilfsbüchlein für Kantleser. 2. Die „Grundlegung" zur Metaphysik der Sitten. (Einführung in Kants Ethik.)
Von Seminardirektor Dr. **Alfred Heußner.**
102 S. 8°. 1922. G. Z. 1,40

Von **Heußner** erschienen ferner in unserm Verlage:

Hilfsbüchlein für Kant-Leser.

1. Kants Prolegomena. Einführung in die Vernunftkritik. IV, 113 S. 8°. 1921. G. Z. 1,40

Einführung in die Psychologie.
2. durchgesehene Auflage. IV, 247 S. 8°. 1920. Geb. G. Z. 3,80

Die philosophischen Weltanschauungen und ihre Hauptvertreter.
Erste Einführung in das Verständnis philosophischer Probleme.
6. vom Verfasser durchgesehene Auflage. 13.—16. Tausend. IV, 225 S. 8°. 1921. Mit Erläuterungen fremdsprachlicher Ausdrücke und einem Literaturverzeichnis. Geb. G. Z. 3,60

Als „Neue Folge" 1. und 2. Heft sind erschienen:

Einführung in Wilhelm Wundt's Philosophie und Psychologie.
Mit einem Sachregister und Erläuterung philosophischer Fachausdrücke. IV, 148 S. 8°. 1920. Geb. G. Z. 2,80

Einführung in Rudolf Eucken's Welt- u. Lebensanschauung.
VI, 132 S. 8°. 1921. Geb. G. Z. 2,60

Friedel Horns Weg zu Gott.
95 S. 8°. 1919. Fein kart. G. Z. 1,50, in Geschenkband hübsch geb. G. Z. 2,20

Verlag von Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen.

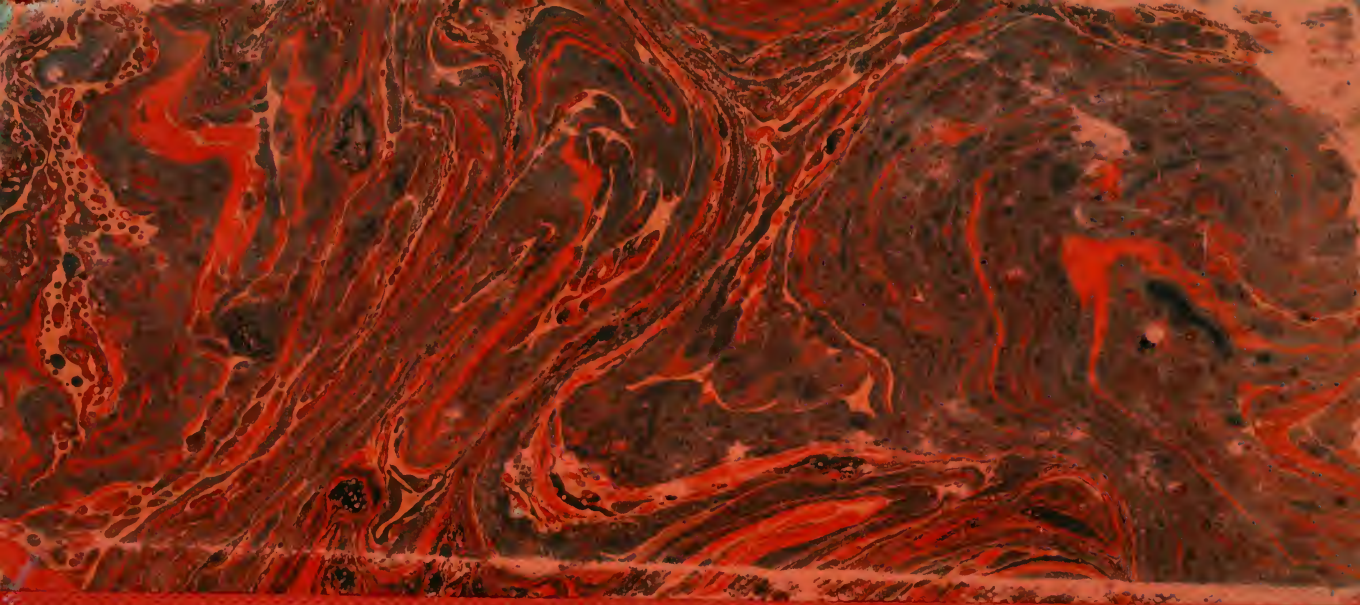
*) Die Grundzahl (G. Z.) ergibt multipliziert mit der offiziellen, in jeder Buchhandlung zu erfahrenden, jeweiligen Schlüsselzahl (Ende September 80) den gegenwärtigen Marktpreis.

This book is DUE on the last date stamped below

Form L-9–10*m*-5,'28

UC SOUTHERN REGIONAL LIBRARY FACILITY
A 000 169 676 4

Engineering & Mathematical Sciences Library
QA9
K91e
AUXILIARY STACK

JUL 72

UNIVERSITY OF CALIFORNIA
LOS ANGELES
LIBRARY